Relationale Geometriesoftware

und

relationales Denken in der Geometrie

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Dr. rer. nat.

Eingereicht an der

Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Augsburg

von

Michael Schneider

Augsburg, April 2016

Universität
Augsburg
University

Erstgutachter:	Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Zweitgutachter:	Prof. Dr. Matthias Ludwig
Tag der Disputation:	7. Juli 2016

Danksagung

An erster Stelle gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Reinhard Oldenburg für die Vergabe des für mich spannenden Themas. Darüber hinaus hat er die Arbeit trotz vieler Verpflichtungen und beiderseitigem Ortswechsel geduldig betreut. Herrn Prof. Dr. Matthias Ludwig danke ich sehr für seine flexible Tätigkeit als externer Zweitgutachter und für seine Anmerkungen zum vierten Kapitel. Diese waren direkt nachvollziehbar und haben mir geholfen, den Praxisbezug stärker herzustellen. Außerdem hat mir Prof. Ludwig mit auf den Weg gegeben, meinen eigenen Stil zu finden. Das war für mich am schwierigsten, aber auch am wichtigsten.

Frau Prof. Dr. Katja Krüger und Herr Prof. Dr. Lutz Führer haben mir in zahlreichen persönlichen Gesprächen gezeigt, wie facettenreich die Mathematik und ihre Didaktik sind. Herr Honorar-Professor Dr. Jürgen Poloczek und Herr Dr. Philipp Ullmann haben mich während meiner Zeit an der Goethe-Universität Frankfurt und danach oft ermuntert, die Arbeit fertigzustellen. Frau Prof. Krüger und die genannten Herren stehen stellvertretend für das dortige Kollegium, das mir eine Lern- und Lehrumgebung geboten hat, in der ich mich vom Mathematiker zum Didaktiker weiterentwickeln konnte.

Den zwölf Probandinnen und dem Probanden danke ich dafür, dass sie sich trotz des engen Studienplans für ein Interview zur Verfügung gestellt haben. Ihre Aufwandsentschädigung hat die Klaus Tschira Stiftung gGmbH im Rahmen des Projekts „Geometrie-Algebra-Softwareintegration“ ermöglicht.

Herr Dr. Christof Schreiber hat mir hilfreiche Anregungen für die Transkription der Interviews gegeben. Frau Melanie Huth hat mir geduldig gängige Auswertungsverfahren vorgestellt. Ich finde es erfreulich, wenn die Grenzen zwischen Primarstufe und Sekundarstufe aufgelockert werden.

Herr Prof. Dr. Markus Hohenwarter hat mir freundlicherweise erlaubt, Abbildungen mit seinem Programm GeoGebra zu erstellen. Herr Philip Todd und Herr Roland Mechling haben mir selbiges erlaubt mit ihren Programmen Geometry Expressions bzw. EUKLID DynaGeo. Außerdem hat mir Herr Todd unbürokratisch Testlizenzen für Geometry Expressions zur Verfügung gestellt. Mit diesen Testlizenzen wurden die Interviews durchgeführt.

Das Kollegium von Prof. Oldenburg hat mich in Augsburg herzlich empfangen. Insbesondere bedanke ich mich bei der Sekretärin Frau Bruckner, die sich um die organisatorischen Dinge gekümmert hat.

Ein letzter, aber besonderer Dank gebührt Herrn Dr. med. Christian Hellweg aus Frankfurt am Main. Herr Dr. Hellweg fördert hauptsächlich Musiker und ist künstlerisch sehr interessiert. In seinem anregenden Umfeld hatte er es mir ermöglicht, meine ersten Salon-Vorträge über Mathematik zu halten.

All den hier genannten Personen danke ich herzlich.

Innsbruck im April 2016 Michael Schneider

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

es würde mich freuen, wenn Sie durch diese Arbeit Anregungen für Ihre Forschung oder Ihren Unterricht gewinnen. Die Mindmap (S. 10-11) bietet Ihnen eine visuelle Darstellung der Zusammenhänge, in der Einleitung und im Überblick (S. 12-22) finden Sie schriftliche Zusammenfassungen der Kapitel.

Der Bezug auf Personen erfolgt zur besseren Lesbarkeit oft in der männlichen Form, unabhängig von Geschlecht und geschlechtlicher Orientierung.

Abbildungen im Kontext von dynamischer Geometriesoftware wurden mit GeoGebra oder mit EUKLID DynaGeo erstellt. Im Kontext von relationaler Geometriesoftware wurden die Abbildungen mit dem Programm Geometry Expressions erstellt. Punktkoordinaten werden in Geometry Expressions und GeoGebra durch Kommata getrennt, im Fließtext verwende ich jedoch vertikale Trennstriche $(x|y)$, um Missverständnisse bei Kommazahlen zu vermeiden.

Literaturverweise sind in eckigen Klammern [ ] gesetzt. Quellenzitate stehen kursiv, in Anführungszeichen und mit Abstand zu den Seitenrändern.

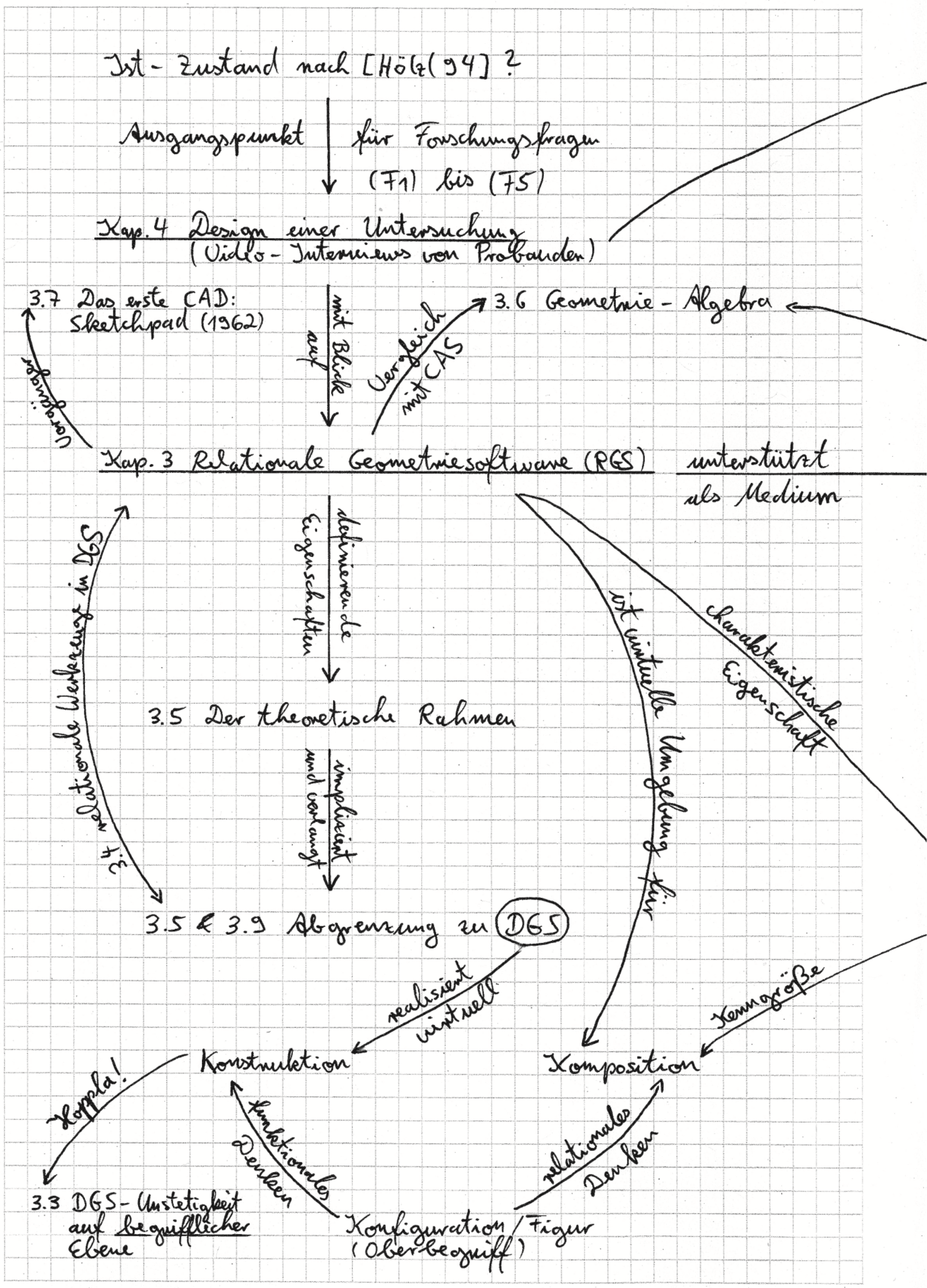
Für Fragen und Anregungen können Sie mich wie folgt erreichen.

Michael Schneider
p. Adr. Herrn Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Lehrstuhl für Didaktik der Mathematik
Universitätsstraße 14
D-86135 Augsburg

Verwendete Abkürzungen

CAD: Computer aided design
CAS: Computer-Algebra-System
DGS: Dynamische Geometriesoftware
FHG: Freiheitsgrad
GE: Geometry Expressions
LGS: Lineares Gleichungssystem
MIT: Massachusetts Institute of Technology
RGS: Relationale Geometriesoftware

Mindmap


Ist-Zustand nach [Hölz(94)]?
Ausgangspunkt für Forschungsfragen (F1) bis (F5)
Kap. 4 Design einer Untersuchung
(Video-Interviews von Probanden)
3.7 Das erste CAD: Sketchpad (1962)
Vorläufer
mit Blick auf
Vergleich mit CAS
3.6 Geometrie-Algebra
Kap. 3 Relationale Geometriesoftware (RGS)
unterstützt als Medium
definierende Eigenschaften
3.4 relationale Werkzeuge in DGS
ist virtuelle Umgebung für
charakteristische Eigenschaft
3.5 Der theoretische Rahmen
impliziert und verlangt
3.5 & 3.9 Abgrenzung zu DGS
realisiert virtuell
Kenngröße
Konstruktion
Komposition
Hoppla!
funktionales Denken
relationales Denken
3.3 DGS-Unstetigkeit auf begrifflicher Ebene
Konfiguration / Figur
(Oberbegriff)

→ 4.2 Auswertungsverfahren

→ 4.4 Interviewpassagen auswählen und transkribieren

→ 4.5 Hypothesen generieren und validieren

→ Antworten auf Forschungsfragen

implizieren → $\boxed{\text{4.7 Handlungsempfehlungen für die Praxis}}$

Funktionales Denken

↕

→ Relationales Denken

in der Geometrie (Kap. 1 & 3.5)

} einander ergänzende Sichtweisen

hin zur

ermöglichen tieferes Verständnis von

wird kultiviert durch

Was soll | das (sein)?

1.2 Charakterisierung analog zu VOLLRATH

führt zur | Frage

liefert Ideen für

Kap. 5 Aufgaben

5.1 Beweglichkeit & FHG
5.2 Exploration
5.3 Nachbau
5.4 Parkettierungen

Kap. 2 Relevanz für Lernende

2.2 & 2.3 Parabel und Pantograph

2.4 Freiheitsgrad (FHG)

→ 2.5 Relationales Hauptprinzip und Rückwärtsarbeiten

Kap. 6 Zusammenfassung und Ausblick

6.1 { Didaktisches Potenzial von RGS:
+ Denken in Relationen
+ Konzept des Freiheitsgrads
+ (Nach-) Entdeckung von Sätzen

Grenzen von RGS
– keine haptische Erfahrung
– wenig Problemlösekompetenz
– Software-Schwächen akt. Vertreter }

6.2 Weiterentwicklung von RGS: theoretisch-konzeptionell
auf der Software-Ebene

Einleitung

Dem funktionalen Denken wird in der Geschichte der Mathematik-Didaktik viel Beachtung geschenkt. Als Beiträge seien etwa genannt [Führer85], [Vollrath89] und [Krüger99].

Im Kontext der Geometrie bieten die Konstruktionen ein anschauliches Umfeld, das funktionale Denken zu kultivieren. Typisch für eine Konstruktion als Problemlöseprozess ist die Notwendigkeit, zu planen und Schritt für Schritt voranzugehen. Dabei hängen im Allgemeinen neue Objekte von bereits existierenden funktional ab:

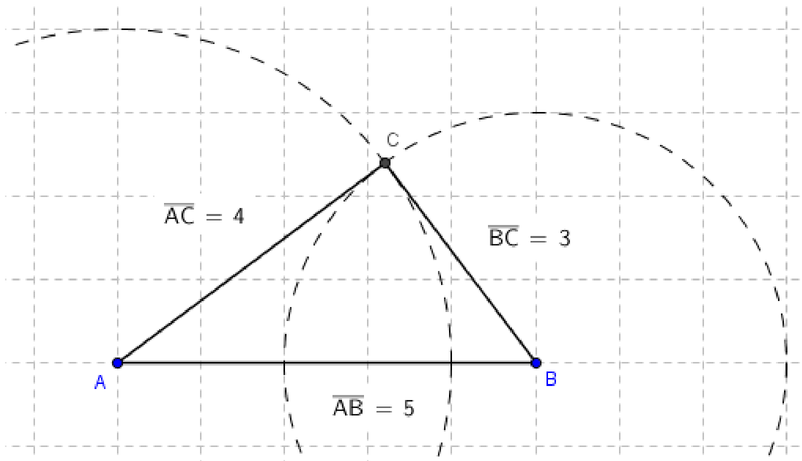


Abbildung 1: SSS-Konstruktion eines Dreiecks

Bei der Dreieckskonstruktion mit drei vorgegebenen Seiten beginnt man einer Seite, zum Beispiel $\overline{AB}$. Der dritte Eckpunkt C ergibt sich dann als Schnittpunkt zweier Abstandskreise. Somit hängt der Punkt C von diesen Kreisen funktional ab.

Mit dieser Arbeit möchte ich jedoch das relationale Denken stärker betonen und die theoretischen Grundlagen der relationalen Geometriesoftware (RGS) auf der Konzeptebene darstellen. Beim relationalen Denken ist nicht entscheidend, welche Größe von einer anderen funktional bzw. einseitig abhängt, sondern in welcher bidirektionalen Beziehung die Größen zueinander stehen. Neben Beziehung werden wir auch die Begriffe Relation und Einschränkung (engl. *constraint*) verwenden.

Aus der obigen SSS-Konstruktion ergeben sich die folgenden Relationen: Der Punkt A hat vom Punkt B den Abstand 5 LE, der Punkt A vom Punkt C den Abstand 4 LE und so weiter. Eine zusätzliche Relation ergibt sich durch Anwendung der Umkehrung des Satzes von Pythagoras: Die Seitenlängen erfüllen die Pythagoras-Gleichung, also stehen die Strecken $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ senkrecht aufeinander.

Aus der Praxis im Umgang mit DGS ist das Phänomen der auseinanderfallenden Konstruktionen bekannt: Benutzer setzen Bedingungen nur augenscheinlich um, zum Beispiel wird eine Gerade möglichst gut an einen Kreis platziert und auf diese Art als Tangente deklariert. Diese vermeintliche Gültigkeit von Bedingungen bringt ein „Wackeltest" im Zugmodus ans Licht: Man verändert die Lage der freien Punkte und sieht dann, welche Bedingungen Bestand haben, also tatsächlich gültig sind oder nur augenscheinlich gesetzt wurden. Es gibt aber auch Benutzer, die sich diesem Phänomen bewusst sind und ihre provisorischen Konstruktionen **im Nachhinein** verfestigen wollen. Das setzt allerdings Funktionalitäten voraus, über die ein übliches DGS nicht verfügt.

Im Folgenden zitiere ich ein Beispiel aus [Hölzl94, S. 90 ff.]. Bei der verwendeten Software handelte es sich um Cabri Géomètre.

> „*Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A. Könnt ihr ein Quadrat ABCD konstruieren, so dass die Eckpunkte B und D auf g liegen?*“

Es wurde folgende Schülerstrategie beobachtet: Der Punkt B wurde als Basispunkt erzeugt und anschließend an die Gerade g gebunden. Über der Strecke $\overline{AB}$ konstruierte der Schüler per Makro ein Quadrat. Da D nicht auf g lag, zog er an B (Abbildung 2 links), bis das Quadrat augenscheinlich den Anforderungen genügte (Abbildung 2 rechts).

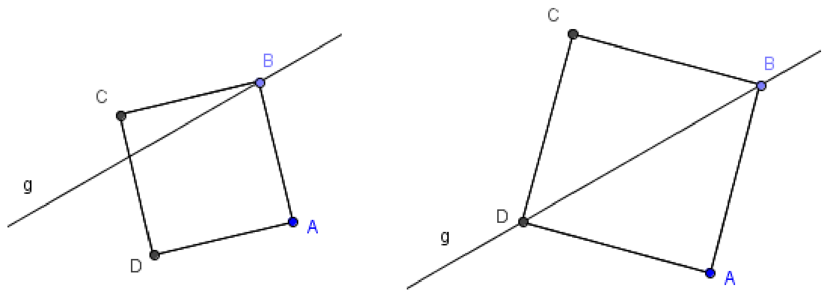


Abbildung 2: Ein Schüler verfolgte die Lösungsstrategie, an *B* zu ziehen, bis *D* augenscheinlich auf *g* liegt.

Nun wollte der Schüler den Punkt D an g binden, doch das Programm verhielt sich passiv, was von Schülerseite auf Verwunderung stieß. Bei einer solchen Punktbindung handelt es sich um eine sogenannte Einschränkung. Dieses Beispiel zeigt, dass solche Einschränkungen in einem DGS nur begrenzt verfügbar sind.

Was wurde seit [Hölzl94] im Bereich der Geometriesoftware entwickelt?

Inzwischen haben dynamische Geometriesysteme (DGS) nicht nur konstruktive, sondern auch relationale Werkzeuge im Portfolio. Mit diesen Werkzeugen können Einschränkungen umgesetzt werden. Zum Beispiel kann ein Benutzer in EUKLID DynaGeo einen Basispunkt an eine Linie binden. Die in Abbildung 2 gezeigte Lösungsstrategie gelingt mit diesem relationalen Werkzeug, wenn man eine softwarespezifische Besonderheit berücksichtigt: Der zu bindende Punkt D muss ein freier Punkt sein.

Ein relationales Geometriesystem (RGS) geht über vereinzelte relationale Werkzeuge hinaus: Dort werden zuerst die beteiligten Objekte erzeugt und dann werden die zwischen ihnen geltenden Relationen bzw. Bedingungen übermittelt. Das bedeutet für das Eingangsbeispiel SSS: Zuerst wird ein beliebiges Dreieck erzeugt und dann werden die gewünschten Streckenlängen an das RGS übermittelt. In der nächsten Bildfolge sehen wir, wie schrittweise Bedingungen an die Streckenlängen übermittelt werden und wie sich die Form des Dreiecks dadurch verändert:

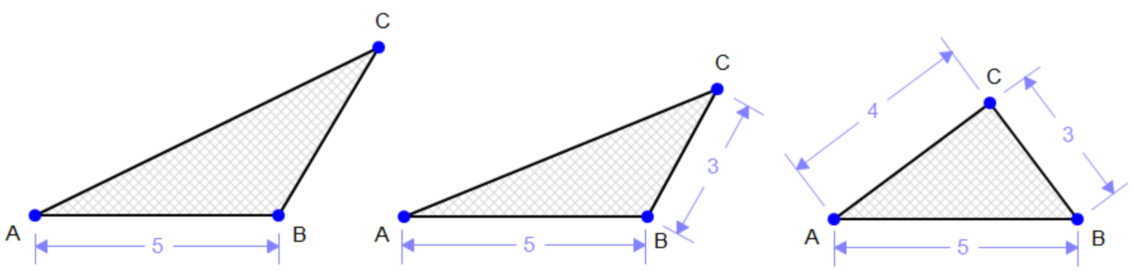


Abbildung 3: Ein Ausgangsdreieck erhält nacheinander die gewünschten Eigenschaften.

Im Gegensatz zu einer Konstruktion ist die Reihenfolge der Schritte hier zweitranging: Die Abstandsbedingungen können in einer beliebigen Reihenfolge übermittelt werden. Inzwischen besitzen einige DGS wie EUKLID DynaGeo und GeoGebra relationale Werkzeuge, aber alleine dadurch wird ein DGS nicht direkt zu einem RGS.

> In dieser Arbeit formuliere ich den theoretischen Rahmen der RGS, grenze RGS von DGS ab und formuliere Vorschläge zur Weiterentwicklung von RGS auf der Konzeptebene. Außerdem möchte ich VOLLRATHS bekannte Umschreibung des funktionalen Denkens sinngemäß auf das relationale Denken übertragen und mit Inhalt füllen.

Das obige Beispiel von [Hölzl94] und die Beobachtung, dass etablierte DGS über solche relationalen Werkzeuge verfügen, führten mich zur Leitfrage, was sich seit [Hölzl94] in dieser Richtung entwickelt hat bzw. welche weitere Geometriesoftware es neben den DGS gibt.

Als ich auf ein konkretes RGS (Geometry Expressions) gestoßen bin, tauchten meine ersten Fragen auf: Worin besteht das didaktische Potenzial eines RGS? Wofür und wie könnte man es zielführend und ergiebig nutzen? Wie gehen wir mit Blick auf klassische Konstruktionen wie SSS im Dreieck mit einer Verfügbarkeit von RGS im Unterricht um?

Diese Gedanken führten mich nach meiner Selbstbeschäftigung mit Geometry Expressions zu den praktischen Forschungsfragen:

(F1) Wie gehen Lernende mit den Möglichkeiten von Geometry Expressions als Vertreter eines RGS um?

(F2) Wie kommen Lernende mit dem Konzept Bedingungen setzen innerhalb der Umgebung von Geometry Expressions zurecht?

(F3) Können Lernende geeignete Werkzeuge innerhalb einer Software-Umgebung auswählen, um ein vorgegebenes Problem zu lösen?

Daran anknüpfend und mit Blick auf die Schwächen von Geometry Expressions ergaben sich die theoretischen Forschungsfragen:

(F4) Wie kann RGS theoretisch-konzeptuell weiterentwickelt werden?

(F5) Wie kann Geometry Expressions als Vertreter eines RGS auf der Software-Ebene weiterentwickelt werden?

Recherche und Quellen

1. Meine Hauptquelle im Sinne eines Ursprungs und Anlasses für Recherche bzw. Forschung ist die bekannte Umschreibung von VOLLRATH:

   „Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist.“ [Vollrath89, S. 5]

   Die Variation dieser Formulierung liefert die Frage, was typisch für den Umgang mit Relationen ist.

2. Der Dissertation von J. ROTH [Roth05, S. 14] entnehme ich die Kernfähigkeiten des bewegten Denkens und formuliere Entsprechungen für das relationale Denken.

3. Anregungen, wie man eine wissenschaftliche Abschlussarbeit schreibt, habe ich dem gleichnamigen Buch [Eco10] entnommen.

4. Die Definition eines DGS in [Graumann et al. 96, S. 197] verwende ich als Referenz, um eine RGS-Definition zu entwickeln.

5. Das in [Hölzl94, S. 90] zitierte Beispiel ist, wie oben beschrieben, Anlass, nachzuforschen, welche weitere Geometriesoftware es neben den DGS gibt.

6. Da EUKLID DynaGeo und Geometry Expressions Forschungsgegenstände sind, zählen auch deren Hilfeseiten zu meinen Quellen, insbesondere [Mechling12] und [Todd13]. Vor diesem Hintergrund habe ich außerdem elektronische Nachrichten mit den Entwicklern, R. MECHLING und PH. TODD, ausgetauscht.

7. Während der Recherche zu RGS und zu CAD habe ich einen Fernsehbericht von 1964 auf YouTube gefunden und ihn im Unterkapitel 3.7 teilweise transkribiert. In dem Mitschnitt werden Forscher der Lincoln Laboratories des Massachusetts Institute of Technology (MIT) bezüglich Sketchpad interviewt.

8. In der Dissertation von HATTERMANN [Hattermann11, S. 68] habe ich im Kontext des Zugmoduseinsatzes von Probanden den Ansatz einer qualitativen Analyse gefunden. Seiner Einschätzung, dass das „*dem Forschungsgegenstand gegenüber als angemessen anzusehen*“ (ebenda) ist, bin ich gefolgt.

9. Durch einen persönlichen Austausch mit M. HUTH wurde ich auf die qualitative Inhaltsanalyse [Mayring10] aufmerksam; dieses ist mein erstes Referenzwerk für die Formulierung des Auswertungsverfahrens.

10. Bei der Transkription von Videomaterial habe ich mich an [Schreiber10, S. 73] orientiert. Darüber hinaus hat mir Ch. SCHREIBER in einem persönlichen Gespräch seine Vorgehensweise erläutert.

11. [Eigenmann81] und [Freudenthal73] hat L. FÜHRER in seinen Vorlesungen und in persönlichen Gesprächen erwähnt.

12. Meine erste Quelle für die islamischen Muster in Unterkapitel 5.4 ist [Sutton07].

Weitere Quellen habe ich online recherchiert, insbesondere [Dreyfus/Hoch09], [BoFuHo95], [Hoffmann/Joan-Arinyo05], [Linchevski/Livneh99] und [Talmon/Yerushalmy04]. Das vollständige Literaturverzeichnis finden Sie im Anhang 7.7 ab S. 236.

Überblick

Im **ersten Kapitel** nähern wir uns dem relationalen Denken an. Dazu beginnen wir mit zwei verschiedenen Arten, eine geometrische Struktur oder Konfiguration zu erfassen: *bottom-up* oder *top-down*. Anschließend werden die für diese Arbeit nötigen Begriffe definiert und erläutert: Relation, Einschränkung, Figur, Konfiguration, Komposition, Kompositionsbeschreibung und Äquivalenz zweier Konfigurationen. Wir orientieren uns an VOLLRATHS charakteristischer Umschreibung des funktionalen Denkens und übertragen diese auf das relationale Denken:

Relationales Denken ist eine Denkweise,

die typisch für den Umgang mit Relationen ist.

Anschließend werden die zentralen Aspekte des funktionalen und relationalen Denkens vergleichend gegenübergestellt und besprochen.

Tabelle 1: Gegenüberstellung von funktionalem und relationalem Denken

	Funktionales Denken	**Relationales Denken**
Verknüpfung zwischen den beteiligten Größen	Zuordnungscharakter	Beziehungscharakter
Hauptaspekt der Verknüpfung	Änderungsverhalten	Invarianzverhalten und „Gleichberechtigung“
Kontext Geometrie (Konfiguration)	Konstruktion	Komposition

Im **zweiten Kapitel** wird die Relevanz des relationalen Denkens für Lernende dargelegt. Wir beginnen mit Beispielen aus der Schulpraxis wie Achsenspiegelung, Parabel als Ortslinie und Pantograph. Anschließend wird das Konzept des Freiheitsgrades einer Konfiguration anhand der beiden Beispiele mathematisches Pendel und Gelenkmechanismus eingeführt.

Als Ergebnis werden wir erhalten: Der Freiheitsgrad einer Konfiguration ist gegeben durch die minimale Anzahl der Größen, die das System eindeutig beschreiben. Wir formulieren dann als wichtige Feststellung, was für die Umsetzung einer Konfiguration aus relationaler Sicht entscheidend ist:

Relationales Hauptprinzip zur Umsetzung einer Konfiguration

Für die Umsetzung einer Konfiguration ist entscheidend, dass alle relevanten Relationen erkannt und umgesetzt werden.

Als Beispiele betrachten wir die Konfigurationen Sehnenviereck mit Umkreis und gemeinsame Tangenten an zwei Kreisen. Schließlich verknüpfen wir das relationale Hauptprinzip mit dem Verfahren des Rückwärtsarbeitens und stellen den Bezug zum Prinzip der Vertauschung zwischen gegebenen und gesuchten Objekten her.

Das **dritte Kapitel** bildet den theoretischen Hauptteil der Arbeit. Dort werden zu Beginn die dynamischen Geometriesysteme (DGS) und das funktionale Prinzip eingeführt. Anschließend diskutieren wir das bekannte prinzipielle Spannungsverhältnis zwischen Stetigkeit und Determiniertheit in einem DGS. Im folgenden Unterkapitel wird eine neue Art von Unstetigkeit entdeckt: die Unstetigkeit auf der begrifflichen Ebene. Hier „springt" ein Parallelogramm zum Trapez um.

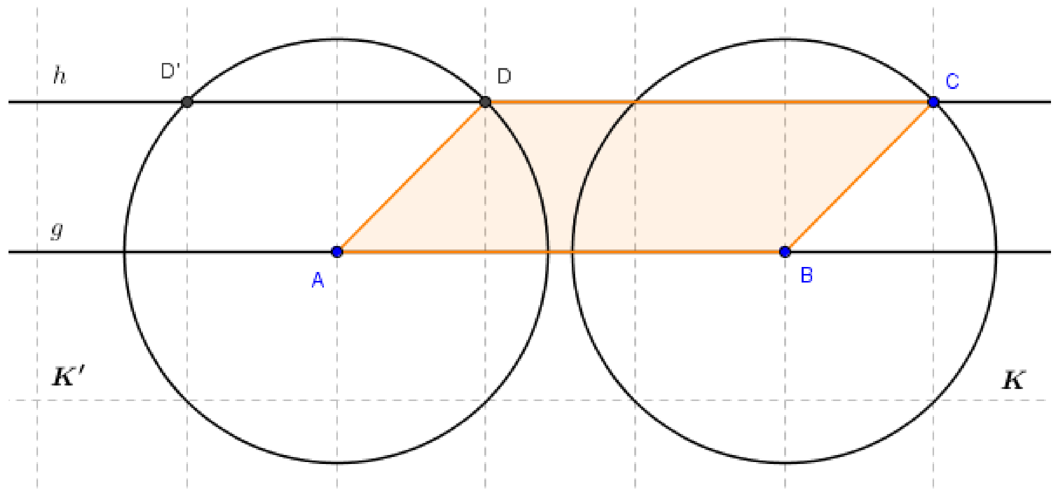


Abbildung 4: Konstruktion eines Parallelogramms $ABCD$ in GeoGebra

Verschiebt man den Punkt C nach links, so rücken die Punkte D und D' zusammen und inzidieren im Grenzfall eines Rechtecks. Setzt man dieses Verschieben fort, so entfernen sich D und D' voneinander und das Parallelogramm wird zum Trapez, ohne dass ein Punkt springt:

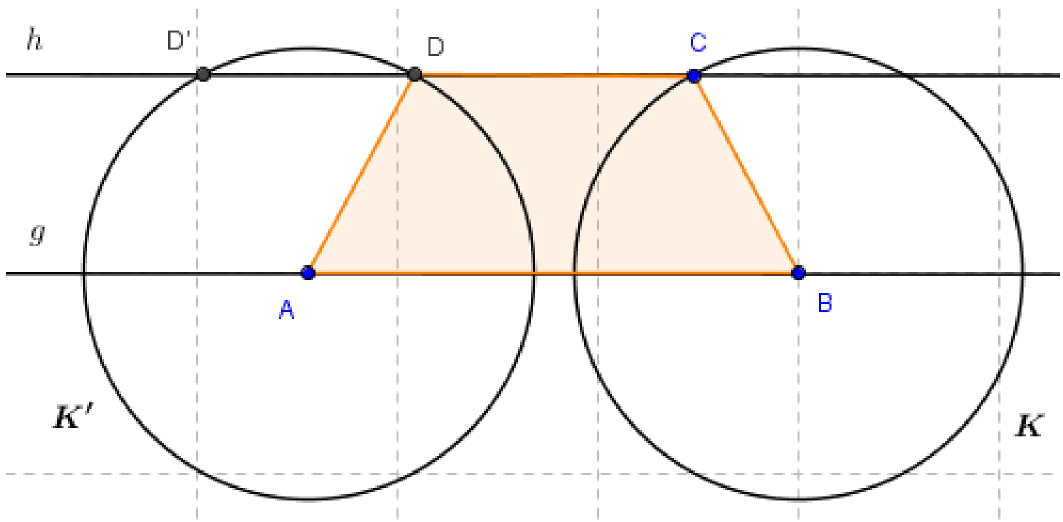


Abbildung 5: Das Parallelogramm ist zum Trapez geworden.

Anschließend werden einzelne Werkzeuge der DGS-Vertreter als relational identifiziert; zum Beispiel sind *Strecke fester Länge* und *Punkt auf Linie* solche relationalen Werkzeuge.

Nach dieser Vorbereitung können wir den theoretischen Rahmen der relationalen Geometriesoftware (RGS) formulieren. Das Fundament hierzu ist das:

> **Hauptprinzip der relationalen Geometriesoftware**
>
> Das System realisiert die Bedingungen, die man übermittelt, aber abgesehen davon kann der Benutzer die Konfiguration im Zugmodus frei verändern.

Damit kann dann ein RGS definiert werden. Diese Definition ist grundlegend für die vorliegende Arbeit und wird ausführlich besprochen:

Ein **ideales RGS** ist ein Geometrieprogramm, das folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Geometrische Grundobjekte wie Punkt, Strecke, Gerade, Kreis können erzeugt und wieder gelöscht werden.
2. Geometrische Relationen können zwischen Objekten vorgeschrieben und wieder gelöscht werden. Solche Relationen sind beispielsweise Inzidenz, Kollinearität, Parallelität, Orthogonalität und Abstandsgleichheit.
3. Für den Zugmodus gilt das Hauptprinzip der RGS.

Die Gültigkeit des Hauptprinzips der RGS impliziert, dass in einem idealen RGS keine Unterscheidung zwischen freien und abhängigen Punkten existiert. Im Sinne der Definition eines DGS von GRAUMANN et al. [Graumann et al. 96, S. 197] können wir folgende Eigenschaften ergänzen:

4. Eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen lässt sich zu einem neuen Befehl zusammenfassen (Makro).
5. Ein RGS kann die Bahnbewegung von Punkten visualisieren, die in Relation zu anderen Punkten stehen (Ortslinie).

Auch bei einem RGS können Unstetigkeiten auftreten. Das belegen wir am Beispiel der Konfiguration eines Dreiecksinkreises, der im Zugmodus zum Ankreis springt:

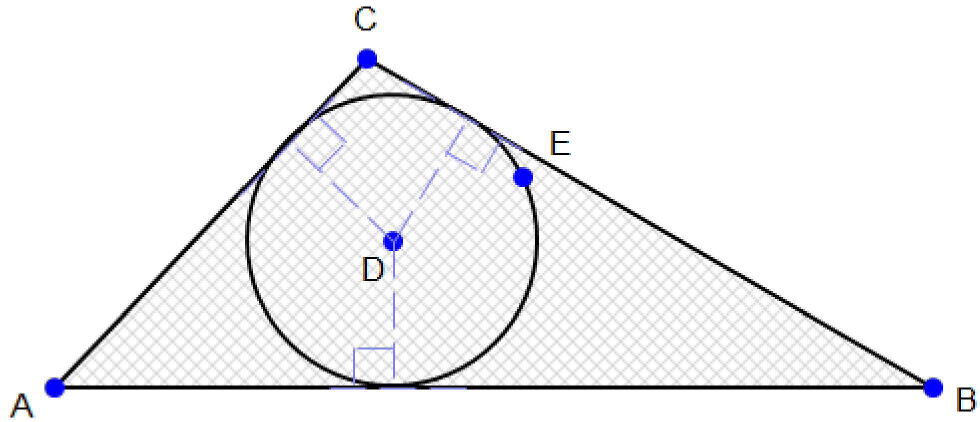


Abbildung 6: Der Inkreis des Dreiecks ABC wurde in einem RGS mittels Tangentialbedingungen umgesetzt.

Zieht man am Punkt C in Richtung der Seite $\overline{AB}$ und darüber hinaus, so springt der Inkreis zum Ankreis um:

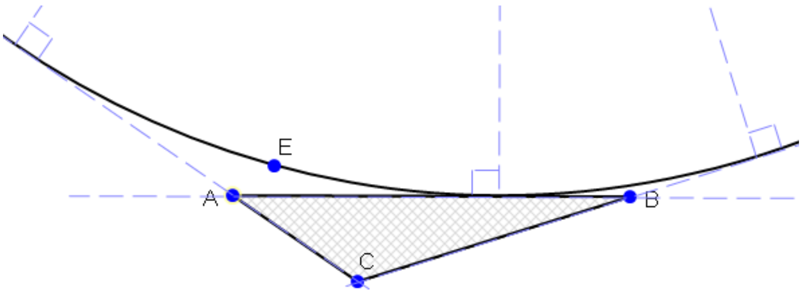


Abbildung 7: Der Inkreis ist zum Ankreis umgesprungen.

Wir ergänzen anschließend die Gegenüberstellung zwischen funktionalem und relationalem Denken durch den zeitlichen Aspekt und die Dynamik.

Tabelle 2: Gegenüberstellung funktionales und relationales Denken (Fortsetzung von Tabelle 1)

	Funktionales Denken	**Relationales Denken**
Zeitlicher Aspekt	Reihenfolge der Konstruktionsschritte ist relevant.	Reihenfolge der Kompositionsschritte ist zweitrangig.
Dynamik	Kann nach J. ROTH bewegt gedacht werden.	Konzept der Freiheitsgrade

Die algebraische Sicht unterstützt das Denken in Freiheitsgraden, daher wechseln wir im anschließenden Unterkapitel die Perspektive hin zur Algebra. Dazu vergleichen wir auf der fachwissenschaftlichen Ebene Entsprechungen zwischen Geometrie und Algebra und auf der softwaretechnischen Ebene Entsprechungen zwischen RGS und CAS.

Im darauf folgenden Unterkapitel transkribiere ich einen Fernsehmitschnitt von 1964, den ich auf YouTube gefunden habe. In dem Bericht werden Forscher der Lincoln Laboratories des Massachusetts Institute of Technology (MIT) bezüglich Sketchpad interviewt. Sketchpad war das erste CAD und ist 1962 im Rahmen der Doktorarbeit von I. SUTHERLAND in den Lincoln Laboratories entstanden.

Abbildung 8: Ein Mitarbeiter der Lincoln Laboratories sitzt vor einem Computer, auf dem Sketchpad läuft.

Anschließend stellen wir mit Geometry Expressions und FeliX zwei Vertreter aktueller RGS vor und gehen danach allgemein auf die softwaretechnische Umsetzung von RGS ein. Im letzten Unterkapitel stellen wir DGS und RGS vergleichend gegenüber.

Tabelle 3: Gegenüberstellung DGS – RGS

	DGS	**RGS**
Zugmodus	Eingeschränkt durch die Trennung zwischen freien und abhängigen Punkten	Nicht eingeschränkt durch diese Trennung
Zu Grunde liegendes mathematisches Konzept	Funktionales Prinzip basierend auf der Trennung zwischen freien und abhängigen Punkten	Hauptprinzip der RGS basierend auf Relationen bzw. Einschränkungen
Zeitliche Reihenfolge der Arbeitsschritte	Relevant	Nicht relevant
Ändern der Konfiguration	Mit Aufwand verbunden	Standard
Makros	Ja	Denkbar
Ortslinie	Ja	Ja
Konzeptuelle Überschneidungen der Software-Vertreter	EUKLID bietet einzelne relationale Werkzeuge.	GE verfügt über einzelne Konstruktionswerkzeuge.
Springende Konfigurationen	Ja	Ja

Das **vierte Kapitel** beschreibt den Praxisteil der Dissertation in Form einer qualitativ empirischen Studie: Gegenstand ist die Arbeitsweise von studentischen Probanden im Umgang mit dynamischer und relationaler Geometriesoftware. DGS-Vertreter ist das Programm EUKLID DynaGeo, RGS-Vertreter ist das Programm Geometry Expressions. Die Probanden wurden hierfür während eines aufgabenzentrierten Interviews videografiert und ihre verbalen Äußerungen transkribiert.

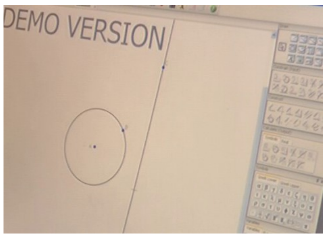
Nummer und Zeit	**Verbale Äußerungen**	**Aktivitäten**	**Bildschirmausschnitt**
#1 **0:00 – 2:20**	*Lara-Marie*: Den kann ich ja dann verändern. Ich brauch ‘nen Punkt außerhalb und dann ne Grade. [--]	**Lara-Marie erzeugt in Geometry Expressions einen Kreis, einen Punkt und eine Gerade.**	

Abbildung 9: Ausschnitt der Transkription (Passage Nr. 3)

Die zugehörigen praktischen Forschungsfragen (F1) bis (F3) wurden bereits in der Einleitung vorgestellt.

Im Kern gliedert sich das Auswertungsverfahren in vier Hauptpunkte.

Auswertungsverfahren

1. Aus der Transkription werden Beobachtungen gesichtet.

2. Die Beobachtungen werden zu einer oder mehreren möglichst falsifizierbaren Hypothese/n verdichtet.

3. Die Hypothese wird analysiert:

   a) Die Hypothese wird theoretisch unterfüttert.
   b) Die Hypothese wird theoretisch angegriffen.

4. Die Hypothese wird angenommen, modifiziert oder abgelehnt.

Des Weiteren werden die Interviewaufgaben allgemein begründet und mögliche Lösungswege besprochen. Die Interviewaufgaben finden Sie auch als Schnell-Übersicht im Anhang 7.3.

Die Erfahrungen der Videointerviews werden zusammengefasst in einer Reflexion und in einem verbesserten Setting. Das Kapitel endet mit Handlungsempfehlungen für die Praxis.

Im **fünften Kapitel** klären wir, welche Aufgaben mit einem RGS zu stark trivialisiert werden und schlagen Aufgabentypen vor, um das relationale Denken zu kultivieren: Der Typ Beweglichkeit und Freiheitsgrad einer Konfiguration wird veranschaulicht durch Aufgaben zum Gelenkarm, einem Rechteck mit konstantem Flächeninhalt und der Ortslinie aller Punkte, die von zwei Kreisen den gleichen Abstand besitzen.

Bei dem Typ Exploration einer Konfiguration konzentrieren wir uns auf das Haus der Vierecke. In den Aufgaben des Typs Nachbau einer vorgegebenen Figur werden Lernende aufgefordert, Kreise, Kreisbogen und Parabeln möglichst passgenau nachzukonstruieren.

Als Steinbruch für Nicht-Standardaufgaben werden anschließend Parkettierungen besprochen. Das sogenannte Kairo-Parkett besitzt als Grundbaustein ein nicht-regelmäßiges Fünfeck. Vier dieser Fünfecke lassen sich zu einem punktsymmetrischen Sechseck zusammenfügen, womit die Ebene lückenlos überdeckt werden kann:

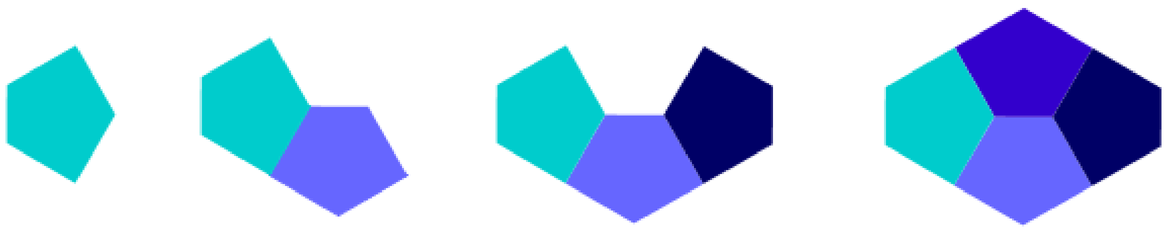


Abbildung 10: Der Grundbaustein der Kairo-Parkettierung

Liegt die Konfiguration in einer Geometriesoftware vor, so kann sie im Zugmodus exploriert werden: Wie viel „Freiheit“ ist in der Konfiguration enthalten? Kann man zum Beispiel einen

Innenwinkel des Ausgangsfünfecks derart verändern, so dass die Parkettierung lückenlos und überdeckungsfrei bleibt? Diese Frage führt zu Variationen des Kairo-Parketts.

Weiter besprechen wir die Parkettierung eines islamischen Musters, zuerst konstruktiv, dann relational:

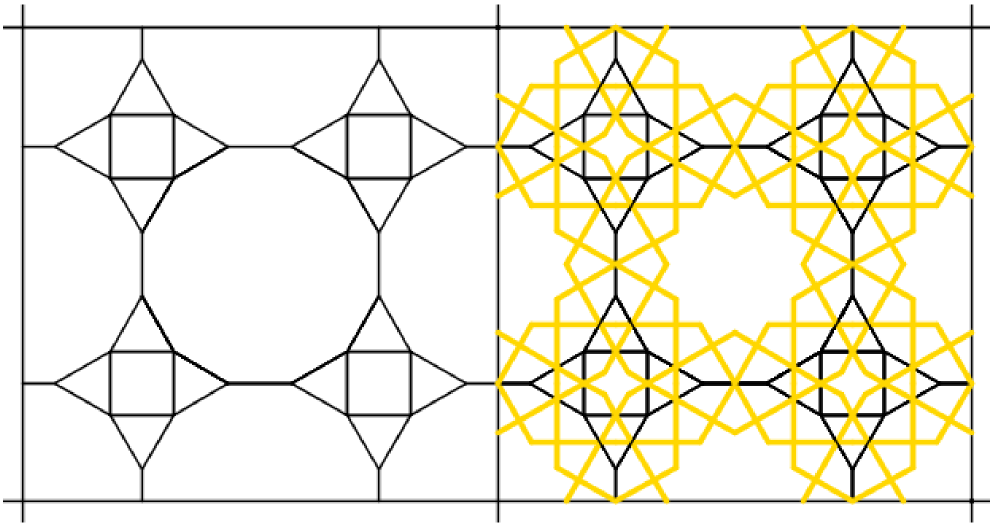


Abbildung 11: Gitterstruktur und überlagertes Muster eines Grundbausteins, vgl. [Sutton07, S. 19]

Das **sechste Kapitel** beginnt mit einer Zusammenfassung des didaktischen Potenzials der RGS und nimmt kritisch Stellung zu den didaktischen Grenzen der RGS.

Danach werden die theoretischen Forschungsfragen der Arbeit besprochen:

(F4) Wie kann RGS theoretisch-konzeptuell weiterentwickelt werden?

(F5) Wie kann Geometry Expressions als Vertreter eines RGS auf der Software-Ebene weiterentwickelt werden?

Die Arbeit endet mit einem Ausblick, der über den Software-Kontext hinausgeht.

1 Relationales Denken in der Geometrie: eine Annäherung

In diesem Kapitel definieren und erläutern wir die für diese Arbeit nötigen Begriffe. Weiter umschreiben wir mit Blick auf VOLLRATH das zentrale Konzept des relationalen Denkens und veranschaulichen es an Konfigurationen. Danach stellen wir funktionales und relationales Denken vergleichend gegenüber.

Beim relationalen Denken ist nicht entscheidend, welche Größe von einer anderen funktional bzw. einseitig abhängt, sondern in welcher **Beziehung** die Größen zueinander stehen. In der Geometrie fokussieren wir diesen Blickwinkel auf die beteiligten Objekte einer Konfiguration.

In der folgenden Konfiguration stehen die Gerade g und die Strecke $\overline{AB}$ senkrecht aufeinander. Weiter berühren sich der Halbkreis K und die Gerade g im Punkt B. Die erste Beziehung ist direkt aus dem Konstruktionsprotokoll ablesbar, die zweite Beziehung gewinnt ein Betrachter durch eine kurze Schlussfolgerung.

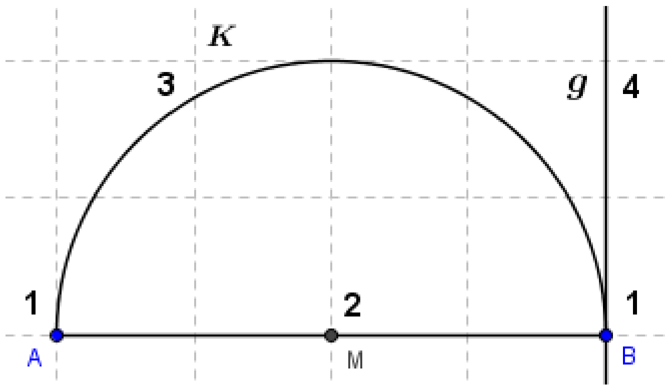


Abbildung 12: Die Objekte einer Konfiguration stehen in Beziehungen zueinander.

Die zugehörige textuelle Konstruktionsbeschreibung der Konfiguration lautet:

1. A, B sind freie Punkte.
2. M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
3. K ist der Halbkreis mit Mittelpunkt M durch A.
4. g ist die Gerade durch B, die senkrecht auf $\overline{AB}$ steht.

Ein Aspekt des funktionalen Denkens nach VOLLRATH ist die funktionale Abhängigkeit. So hängt hier mit Blick auf die Konstruktionsbeschreibung die Gerade g von B und $\overline{AB}$ ab. Relational betrachtet gilt für die Gerade g und die Strecke $\overline{AB}$ die Beziehung, dass sie orthogonal zueinander stehen.

Die Analyse einer geometrischen Struktur oder Konfiguration, die aus zahlreichen Objekten besteht, kann prinzipiell auf zwei verschiedene Arten erfolgen: *bottom-up* und *top-down*. Bei der ersten Art erfasst man eine Struktur ausgehend von Details hin zu den größeren Teilen, bei der zweiten Art ist es genau umgekehrt. Zur Erläuterung betrachten wir das folgende Beispiel.

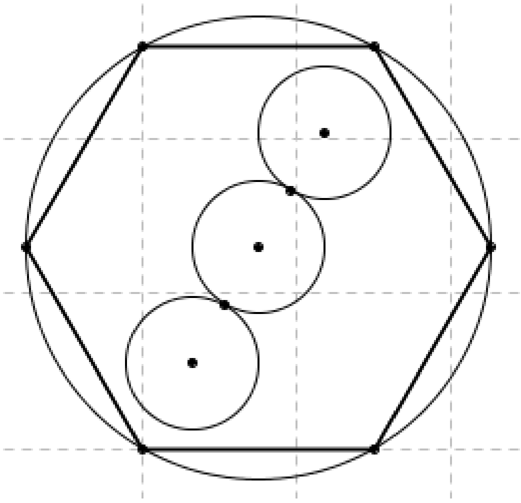


Abbildung 13: Hexagon mit Umkreis und weiteren Kreisen

Erfolgt die Erfassung der Objekte in Abbildung 13 in der Reihenfolge äußerer Kreis, Sechseck, drei kleine Kreise, so reden wir kurz von *bottom-up*. Ist die Reihenfolge genau umgekehrt, so reden wir von *top-down*. Die Frage, ob man sich bei der Konstruktion einer gewünschten Konfiguration für die Strategie *bottom-up* oder *top-down* entscheidet, steht direkt am Anfang.

Portfolio an Grundobjekten bzw. Vorlieben des Betrachters

Die Aufschlüsselung einer geometrischen Struktur durch einen Betrachter wird weiter beeinflusst durch das Portfolio an Grundobjekten bzw. durch die „Vorlieben" des Betrachters.

Abbildung 14: Gitter in Venedig[1]

Welche Grundobjekte könnte ein Betrachter in dem Gitter in Abbildung 14 *erkennen?*

Ein Grundobjekt, das in Frage kommt, ist das Herzsymbol, sowohl aufrecht als auch auf dem Kopf stehend, ein anderer Betrachter erkennt vielleicht ein verschnörkeltes S oder ein Integralzeichen. Beide Grundobjekte sind in Abbildung 15 optisch hervor gehoben.

---

[1] Aufnahme mit freundlicher Genehmigung von Jürgen Köller, www.mathematische-basteleien.de/herz.htm, zuletzt abgerufen am 18. April 2016.

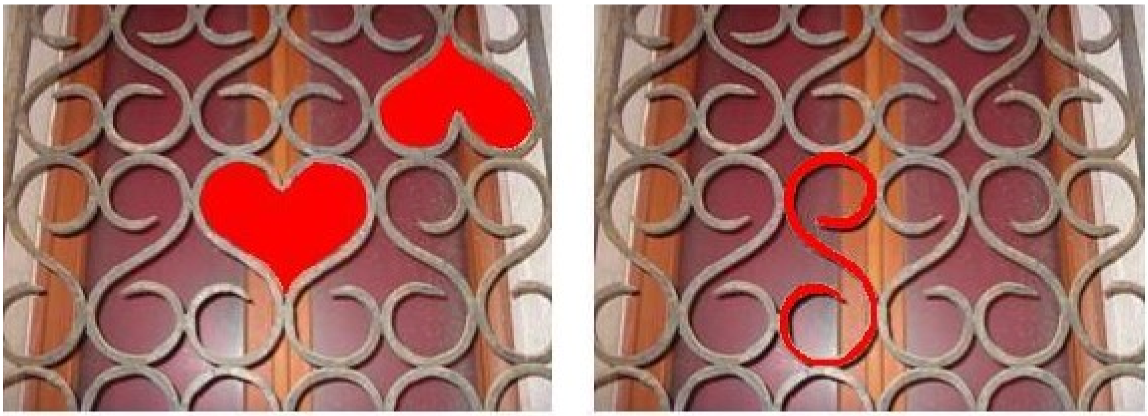


Abbildung 15: Das gleiche Gitter jeweils mit hervorgehoben Herzsymbolen und hervorgehobenem S.

Die Bedeutung des Kontextes für die Mustererkennung

Das folgende bekannte Beispiel aus [Franke07, S. 36] mit Verweis auf [Kebeck94, S. 169] zeigt, wie die Erfassung und Interpretation eines Objekts vom Kontext abhängt.

Abbildung 16: Was steht in der Mitte der Figur – ein B oder eine 13?

Liest man die mittlere Zeile der Figur, so drängt sich der Eindruck auf, dass es sich bei dem mittleren Zeichen um ein B handelt, da es von A und C eingerahmt wird. Liest man hingegen die mittlere Spalte, wird man eher eine 13 interpretieren, da das Symbol von 12 und 14 umschlossen wird. Der Effekt ließe sich verstärken, wenn die jeweilige Folge fortgesetzt wird mit 15, 16, 17 bzw. D, E und F.

Nach dieser ersten Annäherung an das relationale Denken begeben wir uns nun in die Fachwissenschaft und stellen dort die nötigen Begriffe zur Verfügung.

1.1 Nötige Begriffe und Erläuterungen

In diesem Unterkapitel werden grundlegende Begriffe eingeführt und erläutert. Die Begriffe sind der Reihe nach: *Relation, Einschränkung, Figur, Konfiguration, Komposition, Kompositionsbeschreibung* und *Äquivalenz zweier Konfigurationen.*

Die folgende Definition und das Beispiel 1 stammen aus dem Online-Bonusmaterial von [Arens/Hettlich12, S. 4-5].

Definition: ***Relation***

In der Fachwissenschaft bezeichnet man eine beliebige Teilmenge R des kartesischen Produktes $A \times B$ zweier nichtleerer Mengen A und B als **Relation**. Für a aus A und b aus B schreibt man statt $(a, b) \in R$ auch $a \sim b$ und sagt a *steht in Relation zu* b.

Bemerkungen

1. Der allgemeine Fall irgendeiner beliebigen Teilmenge R hat für die Praxis keine Bedeutung. Interessant werden Relationen, wenn zusätzliche Bedingungen erfüllt sind, wie etwa $A = B$, wenn R also eine Teilmenge des kartesischen Produktes $A \times A$ ist.

2. Ist R eine Relation und existiert zu jedem $a \in A$ genau ein $b \in B$ mit $(a, b) \in R$, so lässt sich R auch als Funktion auffassen. In diesem Fall können wir die Relation mit dem Graphen der zugehörigen Funktion identifizieren. Zum Beispiel ist für $A = B = \mathbb{R}$ die Relation R bestehend aus den Punktepaaren (x, x) gerade der Graph der ersten Winkelhalbierenden $y = x$.

3. Im Allgemeinen ist eine Relation keine Funktion. Ein Beispiel hierfür ist gegeben durch den Einheitskreis K als Teilmenge von $[-1; 1] \times [-1; 1]$ mit der charakteristischen Gleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

   Offenbar wird dadurch eine Relation definiert, aber die charakteristische Gleichung lässt nicht eindeutig nach y auflösen, folglich wird durch K keine Funktion beschrieben.

4. Wir betrachten zweistellige Relationen, das heißt, es werden zwei Elemente zueinander in Beziehung gesetzt.

Beispiel 1: die Kleiner-Relation $<$

Sei A die Menge der natürlichen Zahlen. Die Kleiner-Relation $<$ besteht aus allen geordneten Paaren natürlicher Zahlen (a, b), bei denen a kleiner als b gilt. Hier wird für die Relation und das Relationszeichnen üblicherweise das gleiche Symbol benutzt.

In aufzählender Schreibweise sind in der Kleiner-Relation folgende Elemente enthalten: (1,2),(1,3),(1,4),…,(2,3),(2,4),(2,5),…,(3,4),(3,5), (3,6) und so weiter.

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)

Abbildung 17: Die Produktmenge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und die darin enthaltene Kleiner-Relation < (grün)

Mit der obigen fachwissenschaftlichen Definition einer Relation wird die statisch-mengentheoretische Sichtweise betont. Wir fokussieren nun den Kontext auf die Geometrie: Es bezeichne A die Menge aller geometrischen Objekte bestehend aus Punkten, Strecken, Geraden, N-Ecken, Kreisen und Ortslinien. Relationen, die zwischen den Objekten bestehen können, sind beispielsweise: Ein Punkt P liegt auf einer Geraden g, eine Gerade g steht senkrecht auf einer Geraden h, eine Strecke s liegt tangential zu einem Kreis K oder eine Gerade g schneidet eine Ortslinie l und so weiter. Für je zwei beliebige geometrische Objekte kommen nicht alle Relationen in Frage, so ergibt es beispielsweise keinen Sinn, dass ein Punkt senkrecht auf einer Geraden oder auf einem Kreis steht.

Beispiel 2: Eine Gerade g steht senkrecht zu einer Geraden h

Es sei A die Menge aller Geraden. Die Orthogonal-Relation $\perp$ als Teilmenge von $A \times A$ enthält alle Elemente (x, y), für die gilt: die Gerade x steht senkrecht zur Geraden y. Wie bei der Kleiner-Relation wird das gleiche Symbol für die Relation als auch für das Relationszeichen benutzt. Die Gerade g stehe nun senkrecht zur Geraden h, das heißt das Element (g, h) liegt in der Teilmenge $\perp$.

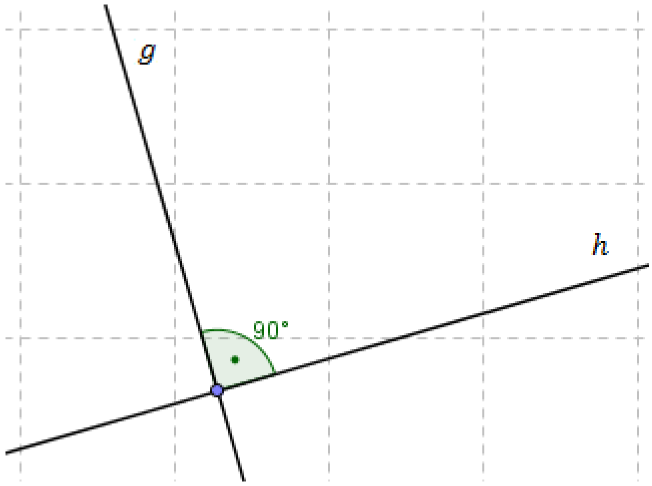


Abbildung 18: Die Gerade g steht senkrecht zur Geraden h, folglich ist (g, h) ein Element der Relation $\perp$.

Mit dem Element (g, h) liegt auch das Element (h, g) in der Relation, denn die Gerade h steht umgekehrt auch senkrecht zur Geraden g. Mit anderen Worten: Die $\perp$-Relation ist symmetrisch. Der geometrische Kontext betont im Gegensatz zur fachwissenschaftlichen Definition die dynamisch-inhaltliche Sichtweise, aber beide Sichtweisen, sowohl die statisch-mengentheoretische als auch die dynamisch-inhaltliche, beschreiben aus unterschiedlicher Perspektive den gleichen Sachverhalt.

Definition: *Einschränkung*

Statt von einer Relation zwischen zwei Objekten sprechen wir auch von einer *Einschränkung* (engl. *constraint*) der Konfiguration, die diese Objekte enthält.

Bemerkungen

1. Eine Einschränkung ist ausgehend von der Konfiguration formuliert, eine Relation ist ausgehend von den Objekten formuliert.

2. Der didaktisch relevante Unterschied zwischen Relation und Einschränkung deutet sich in der Vorstellung an, dass im Fall einer Relation die gegenwärtige Situation beschrieben wird, während hingegen bei einer Einschränkung auch die Vorgeschichte

mit berücksichtigt wird: Zuerst sind Objekte vorhanden und *dann* werden Einschränkungen formuliert. Wir werden im zweiten Kapitel sehen, inwiefern diese Vorstellung bei der Verwendung einer sogenannten relationalen Geometriesoftware ein roter Faden ist.

3. Ein weiterer Unterschied zwischen Relation und Einschränkung zeigt sich in den Fällen, in denen nur ein Objekt vorhanden ist, das mit einer Eigenschaft versehen wird. Hier kann von einer *Relation* a priori nicht die Rede sein.

Wir betrachten als Beispiel zur dritten Bemerkung ein Kreis K mit dem Flächeninhalt $4\pi cm^2$. In der Sichtweise der Einschränkungen bedeutet das: wir erzeugen zuerst einen beliebigen Kreis und fordern dann die Eigenschaft, dass der Flächeninhalt $4\pi cm^2$ betragen soll. Das formulieren wir in der Sprache der Relationen: Der Abstand des Mittelpunktes M und eines Punktes P auf der Kreislinie beträgt $2cm$.

Entscheidend ist hier der kleine Kunstgriff, das gegebene einzelne Objekt K durch zwei andere Objekte zu beschreiben, durch die das Ausgangsobjekt eindeutig bestimmt ist und zwischen diesen beiden Objekten eine passende Relation zu formulieren. So können wir den Kreis K durch seinen Mittelpunkt M und einen Punkt P auf der Kreislinie darstellen:

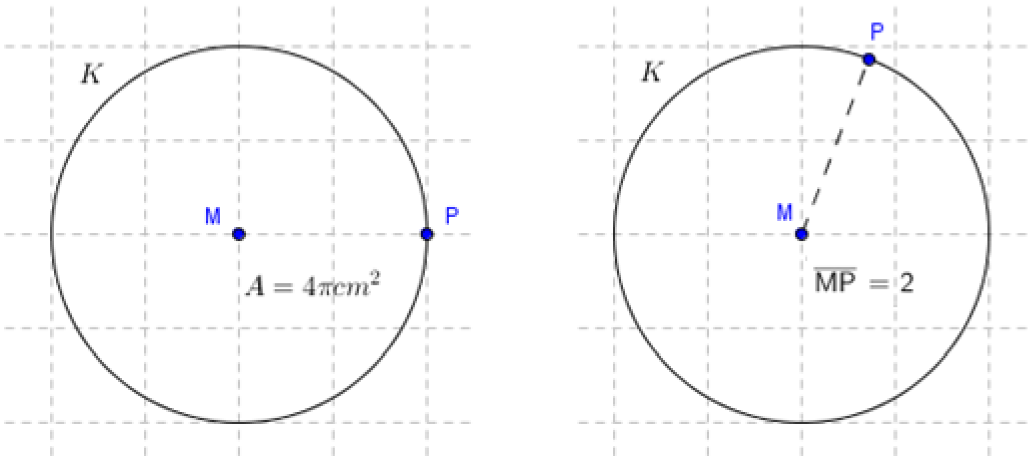


Abbildung 19: Der gleiche Kreis wird zweimal realisiert, durch eine Bedingung an den Flächeninhalt (links) und durch eine Bedingung an den Radius (rechts).

Bei einem Rechteck mit vorgegebenem Flächeninhalt (etwa $12\,cm^2$) können zwei Seiten a und b mit der Längeneinheit cm betrachtet werden, die aufeinander senkrecht stehen und für deren Produkt gilt: $a \cdot b = 12$. Die Relation der Orthogonalität ist eine geometrische, die zweite Relation ist üblicherweise algebraisch formuliert. Bei einem allgemeinen Dreieck mit drei gegebenen Seitenlängen läuft die algebraische Formulierung für die Einschränkung des Flächeninhalts auf die sperrige Formel von HERON hinaus.

Wir halten fest:

1. Den Flächeninhalt oder den Umfang eines Objekts vorzugeben ist zwar eine geometrische Relation, kann aber auch algebraisch formuliert werden.

2. Wir bevorzugen den Begriff Einschränkung, wenn wir die Vorgeschichte der Konfiguration in die Betrachtung miteinbeziehen wollen.

Betrachtet man eine alleinstehende Zeichnung auf Papier oder in einem DGS, so drängen sich Lernenden oft Interpretationen auf, von denen ohne weitere Informationen nicht entschieden werden kann, ob sie zutreffen oder nicht:

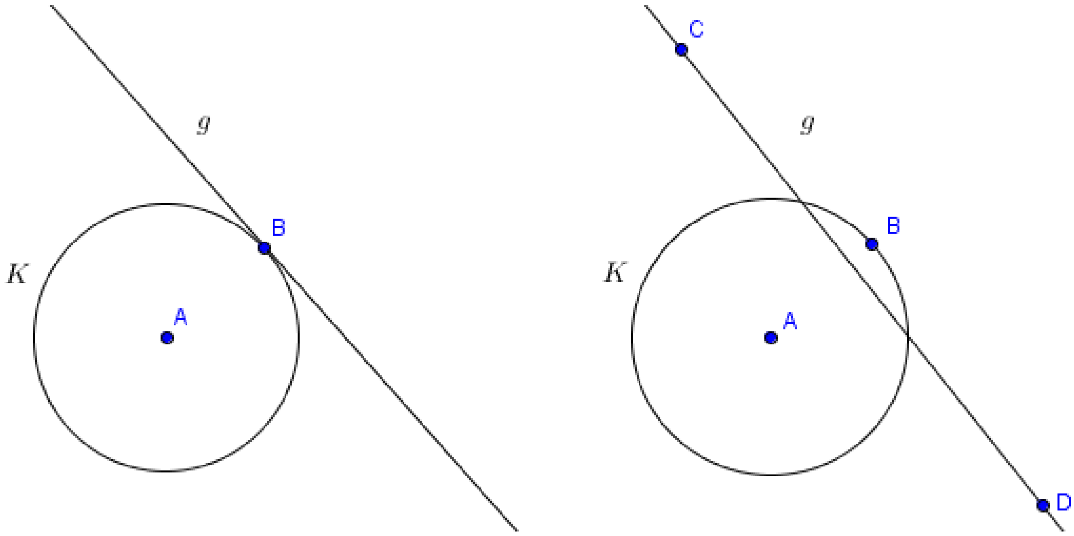


Abbildung 20: Eine vermeintliche Tangente (links) an einen Kreis in einem DGS entpuppt sich im Zugmodus als variable Gerade durch zwei freie Punkte (rechts).

Solche Interpretationen wie in Abbildung 20 lassen sich relational formulieren: „Die Gerade g liegt tangential am Kreis K“, aber ohne stichhaltige Begründung oder einen Wackeltest im Zugmodus bleiben solche Relationen Vermutungen, denn die Abbildung auf Papier bzw. die Konfiguration innerhalb eines DGS ist ohne weitere Informationen eine Zeichnung, aber keine Figur.

Diese Unterscheidung geht nach KADUNZ und STRÄßER in [Kadunz/Sträßer09] zurück auf den französischen Didaktiker PARZYSZ, dieser hatte sie 1988 in seinem Aufsatz ‚Knowing vs. Seeing‘ eingeführt:

Definition: *Figur*

> *Eine Figur ist das geometrische Objekt, welches durch den ihn definierenden Text beschrieben wird, während die Zeichnung als materielle Darstellung der Figur eingeführt wird.* (Übersetzung nach STRÄßER [ebenda, S. 41] mit Bezug auf [Parzysz88, S. 80])

KADUNZ und STRÄßER kommentieren hierzu:

> *„Dabei meinen wir, dass einem geometrischen Objekt (geometrisches Relationen-Gefüge) vom Lernenden in der Sekundarstufe I nur dann erfolgreich Bedeutung zugemessen wird, wenn er die jeweiligen Verwendungsweisen von Figur und Zeichnung beachtet. Die Zeichnung dient zur Findung und vorläufigen Darstellung von geometrischen Relationengefügen und den entsprechenden geometrischen Begriffen. Die Figur dient der sorgfältigen Beschreibung und vor allem der Prüfung dieser Relationengefüge und Begriffe.“* (ebenda, S. 41-42)

Um Vermutungen zu erhärten, kann man auf Papier bestimmte Längen und Winkel messen. Um **sicher** zu sein, dass vermutete Relationen gelten, muss die Konstruktionsbeschreibung dieser Konfiguration analysiert werden.

Falls die Konfiguration in einem dynamischen Geometriesystem vorliegt kann man darüber hinaus im Zugmodus durch Ziehen an Basispunkten prüfen („Wackeltest"), ob diese Relationen Bestand haben oder nicht.

Bemerkungen

1. Notwendig für das Vorliegen einer Figur ist also ein zugehöriger Text, aus dem hervorgeht, wie die Geometrie entstanden ist. Ohne einen solchen Text liegt keine Figur, sondern lediglich eine Zeichnung vor.

2. Ein solcher Text kann eine Konstruktionsbeschreibung sein oder auch eine Beschreibung der beteiligten Relationen.

3. Anstatt von einer Figur reden wir auch von einer **Konfiguration**, insbesondere dann, wenn die Figur in einem Geometriesystem vorliegt.

Diese Bemerkungen motivieren die beiden nächsten Begriffe.

Definition *Komposition* und *Kompositionsbeschreibung*

Die Gesamtheit aus existierenden Objekten und den zwischen ihnen geltenden Relationen bezeichnen wir als Komposition. Den definierenden Text der Komposition bezeichnen wir als Kompositionsbeschreibung.

Bemerkungen

1. Der Oberbegriff von Konstruktion und Komposition ist Konfiguration oder Figur.

2. Bei einer Konstruktion ist die Reihenfolge der Konstruktionsschritte relevant, bei einer Komposition hingegen ist das im Allgemeinen nicht der Fall, denn alle Relationen sind paarweise durch das logische UND miteinander verknüpft.

3. Es ist möglich, durch zwei verschiedene Mengen von Relationen zu einer gleichwertigen Komposition zu gelangen.

4. Nicht jede Komposition kann in eine Konstruktion umgewandelt werden, wenn nur Zirkel und Lineal als Konstruktionswerkzeuge zugelassen sind. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist die Winkeldreiteilung nach ARCHIMEDES.

5. Umgekehrt kann jede Grundkonstruktion mit Zirkel und Lineal als Komposition formuliert werden, da sich Grundkonstruktionen relational formulieren lassen. Für die Mittelsenkrechte m zweier Punkte A und B lautet eine solche Formulierung etwa: Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, die Gerade m verlaufe durch M und m stehe auf $\overline{AB}$ senkrecht.

   Die Bedingungen an eine Gerade g, dass g durch M verläuft und dass g von A und B den gleichen Abstand hat, liefern **nicht** zwangsläufig die Mittelsenkrechte, sondern das Geradenbüschel durch den Punkt M. Die Mittelsenkrechte m hat gegenüber der Geraden g die zusätzliche Eigenschaft, dass **alle** Punkte P auf g von A und B den gleichen Abstand besitzen.

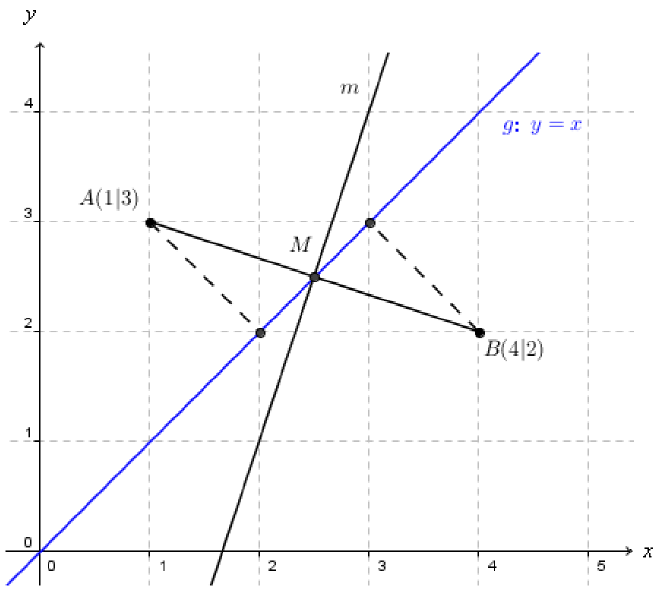


Abbildung 21: Die Gerade g ist nicht die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$.

Bei der letzten Konfiguration deutet sich an, inwiefern das Prinzip der Variation relational genutzt werden kann: Durch Verändern von Bedingungen erfahren Lernende die definierenden Eigenschaften von geometrischen Objekten.

Die dritte Bemerkung wird durch den folgenden Begriff präzisiert.

Definition *Äquivalenz zweier Kompositionen*

Wir betrachten zwei Kompositionen A und B zusammen mit den Mengen der für sie geltenden Relationen R_1 bzw. R_2. Gilt wechselseitig, dass jede Relation der einen Menge durch alle Relationen der anderen Menge impliziert wird, dann nennen wir die Kompositionen äquivalent.

Bemerkung

Die Definition besagt im Kern, dass Relationen austauschbar sind, genau dann, wenn sie in Gesamtheit die gleiche Konfiguration implizieren. In diesem Sinne sind äquivalente Konfigurationen gleichwertig.

Beispiele äquivalenter Konfigurationen

1. Zwei kongruente Dreiecke

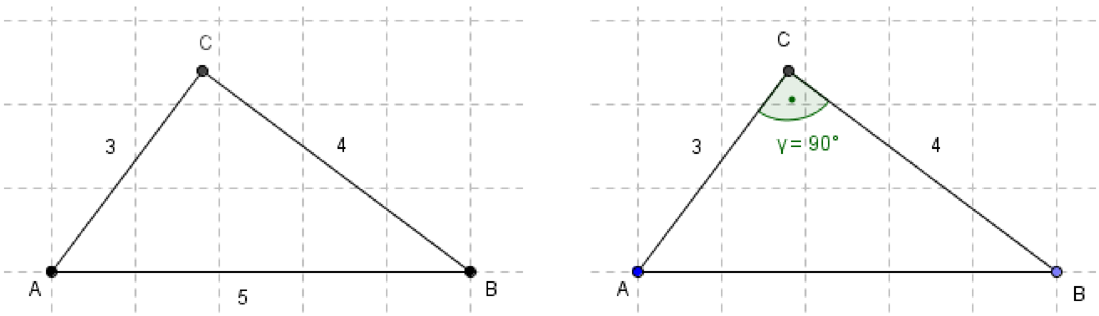


Abbildung 22: Zwei kongruente Dreiecke bilden ein Paar äquivalenter Konfigurationen.

Das linke Dreieck wird durch drei Seitenlängen bestimmt (SSS), das rechte Dreieck durch zwei Seitenlängen und den eingeschlossenen Winkel (SWS). Beide Konfigurationen sind äquivalent: Eine Anwendung des Umkehrsatzes von Pythagoras liefert, dass das linke Dreieck rechtwinklig ist, eine Anwendung des Satzes von Satzes von Pythagoras ergibt, dass die Länge der Hypotenuse des rechten Dreiecks 5 LE beträgt.

2. Dreieck und Umkreis

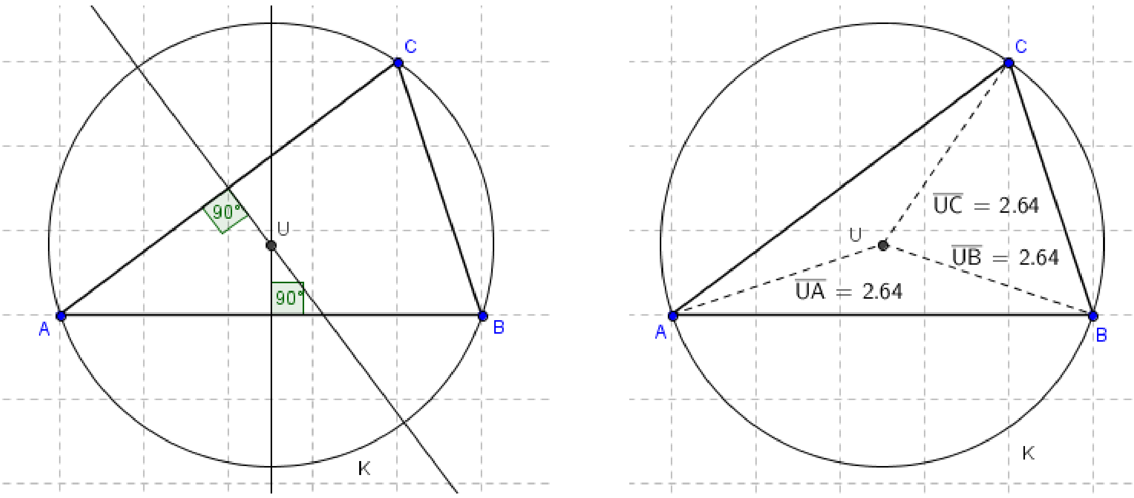


Abbildung 23: Hier bilden jeweils ein Dreieck und sein Umkreis zwei äquivalente Konfigurationen.

In der linken Konfiguration wurde der Umkreis durch zwei Mittelsenkrechten konstruiert, in der rechten Konfiguration wurden drei Abstandsbedingungen übermittelt. Beide Wege führen zu äquivalenten Konfigurationen, denn in beiden hat der Punkt $\boldsymbol{C}$ von den Eckpunkten $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{C}$ den gleichen Abstand.

1.2 Charakteristische Umschreibung des relationalen Denkens und Vergleich mit dem funktionalen Denken

Bei VOLLRATHS bekannter Umschreibung des funktionalen Denkens in [Vollrath89, S. 5] stehen die Funktionen im Mittelpunkt, beim relationalen Denken hingegen sind es die Relationen. Dementsprechend bietet sich die folgende Formulierung an:

Charakteristische Umschreibung des relationalen Denkens

Relationales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Relationen ist.

Zur Begründung dieser Analogie stellen wir funktionales und relationales Denken in Form einer Tabelle vergleichend gegenüber und führen die einzelnen Aspekte nacheinander aus.

Tabelle 4: Gegenüberstellung von funktionalem und relationalem Denken

	Funktionales Denken	**Relationales Denken**
Verknüpfung zwischen den beteiligten Größen	Zuordnungscharakter	Beziehungscharakter
Hauptaspekt der Verknüpfung	Änderungsverhalten	Invarianzverhalten und Gleichberechtigung
Kontext Geometrie (Konfiguration)	Konstruktion	Komposition

Verknüpfung zwischen den beteiligten Größen

Der Aspekt des Zuordnungscharakters des funktionalen Denkens entspricht dem Aspekt des Beziehungscharakters des relationalen Denkens. Eine Zuordnung besitzt genau eine Richtung: Jedem x der Definitionsmenge wird genau ein y der Zielmenge zugeordnet. Gilt beispielsweise für zwei Zahlen x und y, dass die eine Zahl der Kehrwert der anderen ist, so bedeutet das funktional:

$$y = y(x) = 1/x.$$

Jeder Zahl x ungleich 0 wird durch diesen Funktionsterm ihr Kehrwert zugeordnet. Die relationale Beziehung zwischen den beteiligten Größen x und y lautet, dass das Produkt beider Zahlen gleich 1 ist:

$$x \cdot y = 1.$$

Hier existiert keine Zuordnung von x nach y. Die Größen x und y werden der Grundmenge $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entnommen und bilden als geordnete Paare (x, y) die Elemente der Relation „Das Produkt der beiden Zahlen x und y ist gleich 1.“.

Auf der Software-Ebene entspricht dem Zuordnungscharakter eine Funktion in der jeweiligen Programmiersprache: Eine Funktion f erhält einen x-Wert und liefert den $f(x)$-Wert zurück. Hierbei werden das x und das $f(x)$ insbesondere im geometrischen Kontext keine Zahlen, sondern allgemein Objekte sein. Dem Beziehungscharakter hingegen entspricht ein logischer Wahrheitswert: Entweder gilt die Beziehung (TRUE) oder sie gilt nicht (FALSE).

Hauptaspekt der Verknüpfung

Beim funktionalen Denken ist das Änderungsverhalten zentral: Wird in obigem Beispiel x größer, zum Beispiel von 2 nach 3, so muss y kleiner werden von $1/2$ zu $1/3$. Wird x kleiner, so wird entsprechend y größer. In jedem Fall gilt: y hängt von x ab, mit x ändert sich y. Die relationale Beziehung

$$x \cdot y = 1$$

hingegen betont die Invarianz: Das Produkt $x \cdot y$ bleibt konstant. Anhand der Gleichung sind weiter ersichtlich die Symmetrie und die Gleichberechtigung der Variablen:

Vertauscht man x und y miteinander, so bleibt die Gleichung gültig.

In diesem Beispiel sind zwei Größen beteiligt und es gibt dementsprechend zwei Varianten der Auflösung zu einer Funktionsgleichung:

$$y = y(x) = 1/x$$

bzw.

$$x = x(y) = 1/y.$$

Die algebraische Auflösung nach einer Variablen ist nicht immer eindeutig möglich wie etwa bei der Kreisgleichung

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Hier muss man sich entscheiden, welchen Halbkreis man betrachten will. Der Kreisgleichung entnimmt man, dass x und y symmetrisch sind, das heißt, dass sie vertauscht werden können. Damit können beide Variablen wieder als gleichberechtigt aufgefasst werden – aus der Funktionalgleichung des oberen Halbkreises

$$y = y(x) = +\sqrt{1 - x^2}$$

ist das nicht direkt ersichtlich.

Die für das funktionale Denken typische Aussage über die Wirkung der Änderung einer Größe auf eine davon abhängige Größe entspricht beim relationalen Denken der statischen Aussage, dass zwischen zwei Objekten eine Relation gültig ist.

Kontext Geometrie (Konfiguration)

Beim Konstruieren sucht man einen Weg, um mit den zur Verfügung stehenden Werkzeugen und den damit möglichen Operationen zum gewünschten Endzustand zu gelangen. Für jeden Schritt der Konstruktion gilt das funktionale Prinzip: Neue Objekte hängen im Allgemeinen von bereits existierenden ab. Metaphorisch gesehen errichtet man mit einer Konstruktion Stockwerk um Stockwerk einen Turm. Die Etagen stehen für die einzelnen Konstruktionsschritte, der Turm steht für das Ganze.

Eine Komposition hingegen lässt sich durch zwei Kategorien beschreiben: durch die geometrischen Objekte der Konfiguration und den zwischen ihnen geltenden Relationen. Metaphorisch gesehen entsteht mit dem Übermitteln der Relationen ein Bild, das immer schärfer und klarer wird. Die zur Verfügung stehenden Relationen einer Komposition korrespondieren mit den zur Verfügung stehenden Werkzeugen bei einer Konstruktion.

Vorgang des relationalen Denkens in idealisierter Form

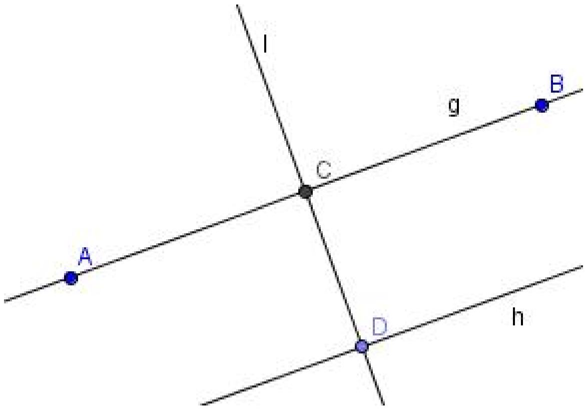
Der Vorgang des relationalen Denkens in einer idealisierten Form gliedert sich in vier Teilschritte:

1. Erkennen von Grundobjekten in einer geometrischen Konfiguration,
2. Auswahl von zwei (oder mehreren) Grundobjekten,

3. in Beziehung setzen der ausgewählten Grundobjekte,
4. kombinieren und schlussfolgern.

Zur Veranschaulichung geben wir zwei Beispiele mit jeweils einer Figur und dem möglichen Gedankengang eines Betrachters.

Beispiel 1: Konfiguration bestehend aus drei Geraden



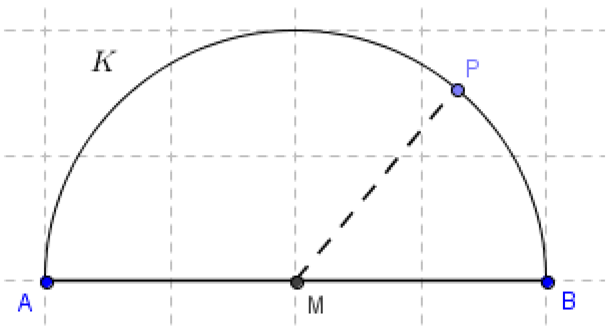
Die Gerade l stehe senkrecht auf der Geraden g und der Geraden h.

Abbildung 24: Relationales Denken veranschaulicht mit drei Geraden

Ein Betrachter der Figur in Abbildung 24 wählt in Gedanken die Geraden g und l aus. Er entnimmt der Information, dass die Gerade l senkrecht auf der Geraden g und der Geraden h steht. Dann setzt er die Geraden g und h in Relation zueinander und schlussfolgert: g und h sind zueinander parallel.

Darüber hinaus kann es vorkommen, dass in Gedanken weitere Objekte in der Konfiguration platziert werden und diese im vierten Aspekt mit berücksichtigt werden. Beispiele hierfür finden sich bei Problemen, zu deren Lösung Hilfslinien eingeführt werden:

Beispiel 2: Strecke mit zugehörigem Thales-Halbkreis



M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

K ist der obere Halbkreis um M durch A.

P ist ein auf K gebundener Punkt.

Abbildung 25: Strecke $\overline{AB}$ mit Thales-Halbkreis und hinzugedachter Strecke $\overline{MP}$

Es sei hier bekannt: M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$, bei dem Bogen handelt es sich um den Halbkreis K mit Mittelpunkt M durch A und B. P liege auf diesem Halbkreis. Ein Objekt, welches in die Konfiguration hinzugedacht werden kann, ist zum Beispiel die Strecke $\overline{MP}$. Hier ist weiter denkbar, dass die Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{MP}$ ausgewählt werden und in Relation gesetzt werden: die Strecken sind aufgrund der Kreissymmetrie gleich lang.

2 Relevanz des relationalen Denkens für Lernende

Dem funktionalen Denken wird in der Geschichte der Mathematik-Didaktik viel Beachtung geschenkt. In dieser Arbeit soll jedoch das relationale Denken stärker betont werden. Als Beleg für die Relevanz des relationalen Denkens führen wir folgende Beispiele aus: die fundamentale Idee der Symmetrie veranschaulicht an der Punktspiegelung an einer Geraden, die Konstruktion einer Parabel als Ortslinie und die Umsetzung eines Pantographen in einer Geometriesoftware. Anschließend beschreiben wir das Konzept des Freiheitsgrades einer Konfiguration und formulieren das relationale Hauptprinzip zur Umsetzung einer Konfiguration und setzen es in Bezug zum Rückwärtsarbeiten.

2.1 *Die fundamentale Idee der Symmetrie am Beispiel der Spiegelung*

BRUNERS *Prozess der Erziehung* von 1970 [Bruner70] motivierte die Frage nach grundlegenden mathematischen Konzepten, mit denen man den umfangreichen Unterrichtsstoff strukturieren und Übersicht schaffen kann. Als solche Konzepte bildeten sich die fundamentalen Ideen heraus, vgl. [TieFöKli00, S. 37 ff.]. Einen einheitlichen Katalog an fundamentalen Ideen gibt es nicht, aber häufig werden die folgenden genannt: Algorithmus, Messen, Optimierung, Symmetrie, Zahl und Zuordnung.

Wir veranschaulichen hier die fundamentale Idee der Symmetrie am Beispiel der Spiegelung eines Punktes an einer Geraden und betrachten dazu eine Konfiguration bestehend aus einer Geraden g, einem Punkt P und dem Spiegelpunkt P' von P an g.

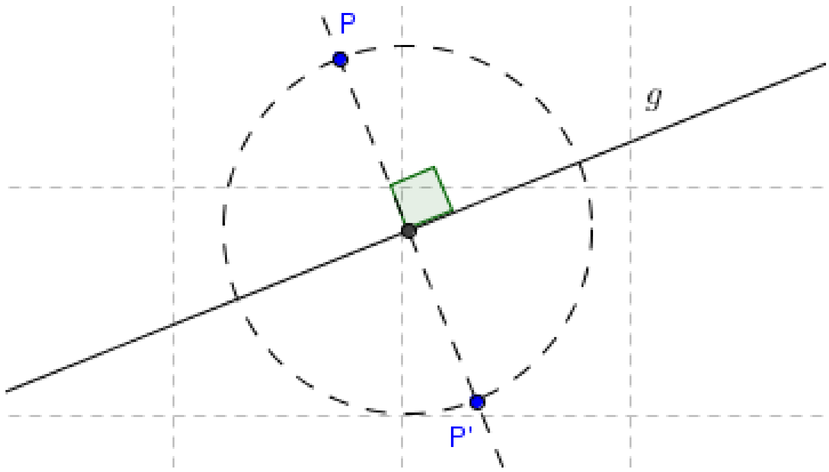


Abbildung 26: P' ist der Spiegelpunkt von P an der Geraden g.

In der zeitlichen Reihenfolge der Konstruktion entsteht der freie Punkt P vor dem Spiegelpunkt P', und P' hängt von P (und der Geraden g) ab. Das ist die funktionale Sichtweise. Gleichwohl könnten hier die Rollen von P und P' vertauscht werden, ohne dass sich die Konfiguration merklich verändert. Die neue Konfiguration ist der alten äquivalent in dem Sinne, dass P und P' weiterhin spiegelsymmetrisch zu der Geraden g liegen. Das ist die relationale Sichtweise: Wir können den Punkt P und den Spiegelpunkt P' als gleichberechtigt auffassen.[2]

[2] Eine *Inversionsfähigkeit*, also eine Vertauschung der beiden Punkte, ist in der Softwareumgebung von Geometer's Sketchpad möglich.

2.2 Parabel als Ortslinie

Wir gehen aus von der Definition der Parabel als Ortslinie:

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden g und einem Punkt F den gleichen Abstand besitzen.

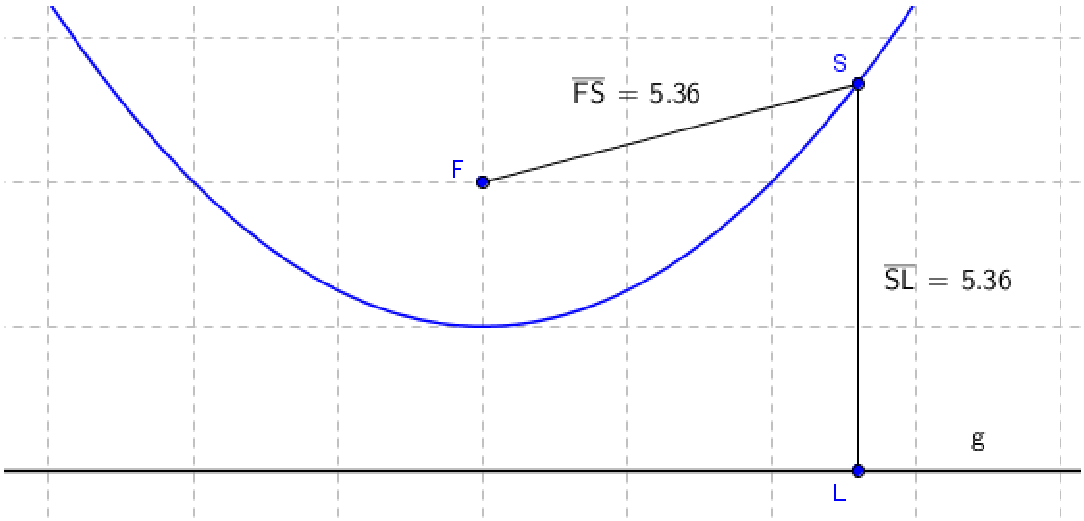


Abbildung 27: Parabel als Ortslinie

Zusammen mit der Definition und der Abbildung 27 lässt sich die Form der Parabel anschaulich-beweglich und qualitativ begründen:

Ein beliebiger Punkt S der Parabel hat von dem Punkt F und der Geraden g den gleichen Abstand. F ist der sogenannte Brennpunkt. Der Abstand zwischen S und g ist gegeben durch den Abstand von S und dem Lotfußpunkt L von S auf g. Bewegt sich S ausgehend von der Abbildung nach links, so nähert er sich dem Punkt F, deshalb muss er sich auch der Geraden g nähern. In diesem Fall wandert L ebenfalls nach links und S und L rücken näher zusammen. Bewegt sich S hingegen nach rechts, so entfernt er sich vom Punkt F, muss sich somit auch von der Geraden g entfernen.

Weiter ist anschaulich klar, dass es genau einen Punkt F gibt, für den der gemeinsame Abstand minimal ist und dass die Parabel symmetrisch zu einer Vertikalen durch F verlaufen muss.

Erste Möglichkeit der Konstruktion: durch Rückwärtsarbeiten

Die Aufgabe, eine Parabel mit einem DGS zu konstruieren, liefert ein typisches Beispiel für die Strategie des sogenannten Rückwärtsarbeitens. Beim Rückwärtsarbeiten geht man von dem gewünschten Ergebnis aus, arbeitet sich zurück zu den gegebenen Größen und versucht auf diesem Wege Informationen zu gewinnen, die für die Lösung nützlich sind. Nimmt man bei der Parabel an, dass ein beliebiger Punkt S bereits bekannt ist, so kann man das Lot von S auf die Gerade g fällen. Der Schnittpunkt des Lotes mit der Geraden g ist der Lotfußpunkt L. Der Punkt S hat von F und L den gleichen Abstand. Alle Punkte mit dieser Eigenschaft liegen auf der Mittelsenkrechten m von F und L. Gibt man also den Punkt L vor, so erhält man S als Schnittpunkt der Mittelsenkrechen m und der Lotgeraden l. Auf diese Weise ist ein beliebiger Punkt S der Parabel rückwärts konstruiert.

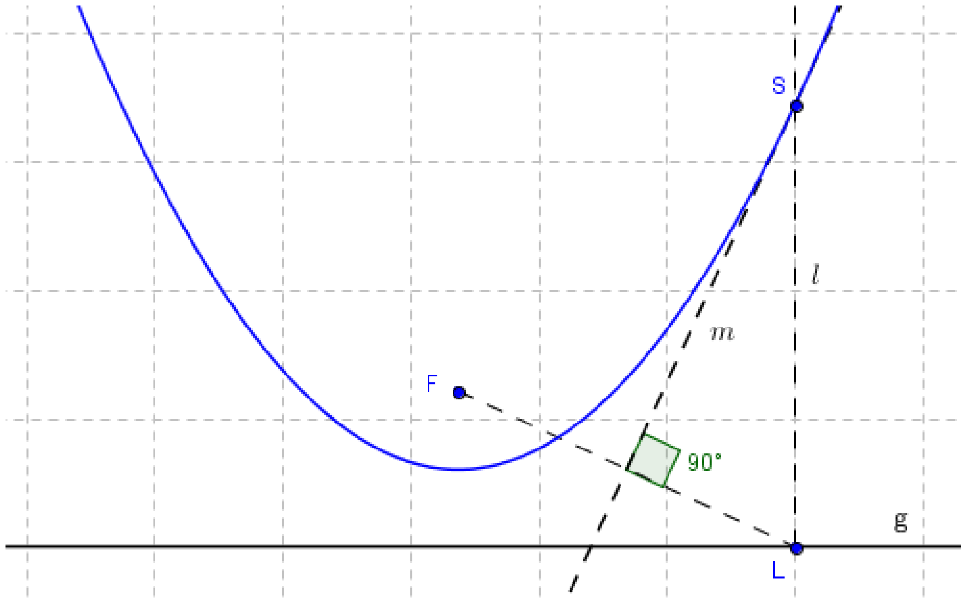


Abbildung 28: Der Punkt S entsteht als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten m und des Lotes l.

In einem DGS setzt man mit dem Werkzeug *Punkt auf Objekt* einen variablen Punkt L auf die Gerade g und benutzt das Werkzeug *Ortslinie.* Dann zieht man L entlang der Geraden g. Dadurch bewegt sich S und hinterlässt die Parabel als Farbspur: $S = S(L)$.

Zweite Möglichkeit: Mittels eines Abstandskreises und eines Schiebereglers

Sehen sich Lernende mit der Aufgabe konfrontiert, eine Parabel als Ortslinie zu konstruieren, wissen Lehrkräfte zu berichten, dass manche Lernende anders vorgehen:

Ausgehend vom Punkt $\boldsymbol{P}$ und der Geraden $\boldsymbol{g}$ erstellen Lernende einen Schieberegler mit der Variablen $\boldsymbol{Abstand}$. Dann konstruieren sie einen Kreis um $\boldsymbol{P}$ mit dem Radius $\boldsymbol{Abstand}$ und eine Parallele $\boldsymbol{h}$ zu $\boldsymbol{g}$, die von $\boldsymbol{g}$ genau diesen $\boldsymbol{Abstand}$ besitzt. Diese Konstruktion ist in Abbildung 29 dargestellt.

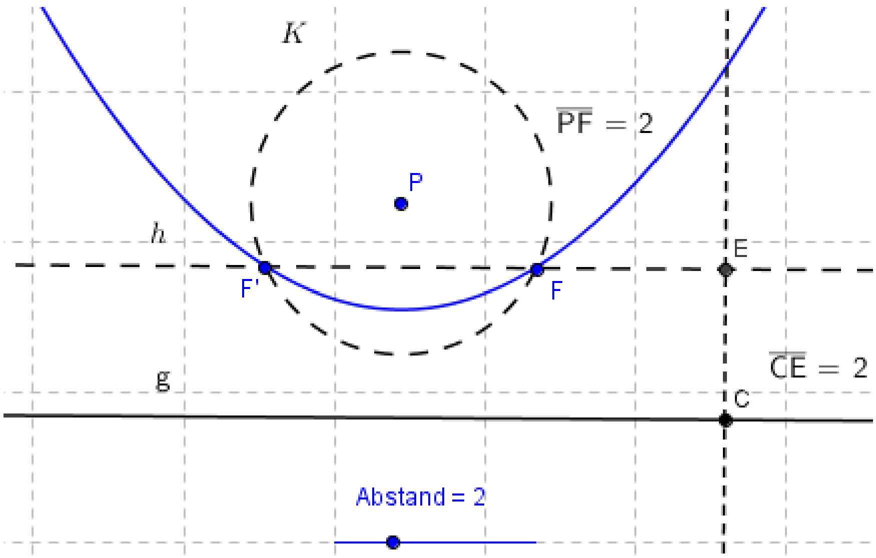


Abbildung 29: Die Parabel wird in einem DGS mittels eines Schiebereglers umgesetzt.

Genau die Schnittpunkte F und F' des Kreises K mit der Geraden h erfüllen die Ortsliniendefinition der Parabel. Mit dem Schieberegler kann der $Abstand$ nun verändert werden. Dabei bewegen sich die Punkte F und F' auf der gesuchten Parabel. Diese kann dann mit dem Werkzeug *Ortslinie* oder *Spur* sichtbar gemacht werden.

Woran könnte es liegen, dass Lernende eine Tendenz zur zweiten Konstruktion zeigen?

Zur Beantwortung dieser Frage wiederholen wir die Definition der Parabel als Ortslinie:

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden g und einem Punkt P den gleichen *Abstand* besitzen.

Was ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einem Punkt P den gleichen Abstand besitzen? Das ist ein Kreis um P mit diesem Abstand als Radius. Was ist der geometrische Ort aller Punkte, die von einer Geraden g den gleichen Abstand besitzen? Das sind zwei Parallelen zu g, jeweils auf unterschiedlichen Seiten von g mit genau diesem Abstand zu g. Beide Aussagen werden im Unterricht behandelt und motivieren nach meiner Meinung den zweiten Lösungsweg unter der Voraussetzung, dass der Schieberegler in dem DGS bekannt ist.

Anders gefragt: Warum sollten Lernende den Ansatz des Rückwärtsarbeitens finden und umsetzen können? Selbst wenn die Mittelsenkrechte als Ortslinie unmittelbar vor der Parabel behandelt wird, bleibt bei diesem funktionalen Lösungsweg die für Lernende anfangs hohe Hürde des Rückwärtsarbeitens. Die relationale Sichtweise auf die Definition der Parabel als Ortslinie sensibilisiert Lehrende hinsichtlich dieser Schwierigkeiten von Lernenden.

2.3 Pantograph

Als weiteres Beispiel für die Relevanz des relationalen Denkens für Lernende betrachten wir die Umsetzung eines Pantographen mit einem DGS. Ein Pantograph ist ein mechanisches Instrument zum Übertragen von Zeichnungen in einen anderen (oder den gleichen) Maßstab. Mit dem Pantographen wird eine Vorlage nachgezeichnet. Dabei entsteht eine verkleinerte, eine vergrößerte oder eine gleichgroße Kopie der Vorlage.

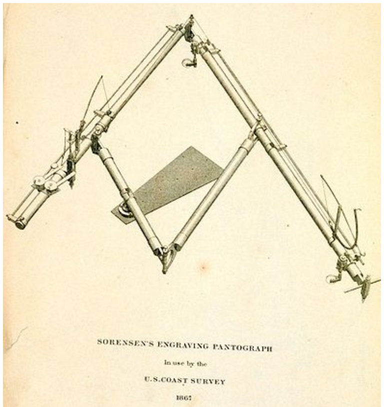


Abbildung 30: Ein Pantograph (Storchenschnabel)[3]

[3] Bild entnommen von http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pantograph.jpg als Teil der Public Domain, zuletzt abgerufen am 18. April 2016.

Der Pantograph besteht aus vier Stangen, die miteinander durch Gelenkscharniere verbunden sind. Der mittlere Teil des Pantographen bildet ein Parallelogramm.

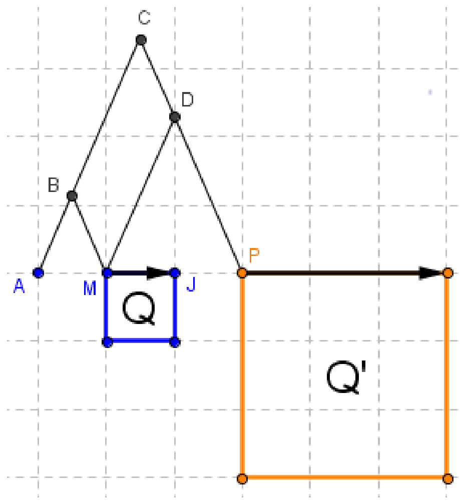


Abbildung 31: Funktionsweise eines Pantographen in einem DGS

Ein Benutzer fährt mit dem mittleren Punkt M die zu übertragende Zeichnung entlang. Dabei entsteht die Kopie als Spur des Punktes P. In obiger Abbildung entsteht auf diese Weise das größere Quadrat Q', indem man den Punkt M entlang den Seiten des kleinen Quadrates Q bewegt. Der Streckungsfaktor ergibt sich nach einer kurzen Rechnung mit dem ersten Strahlensatz als Verhältnis der Streckenlänge $|\overline{AC}|$ zur Streckenlänge $|\overline{AB}|$. Augenscheinlich beträgt der Vergrößerungsfaktor in Abbildung 31 für diese Konfiguration drei Längeneinheiten bzw. neun Flächeneinheiten.

Lernende haben erfahrungsgemäß deutliche Schwierigkeiten, einen Pantographen mit einem DGS umzusetzen. Die erste Hürde besteht bereits am Anfang der Konstruktion, wenn die freien Punkte bestimmt werden sollen. Mit Blick auf die Funktionsweise des Pantographen muss der mittlere Punkt M frei sein, denn damit fährt ein Benutzer die Vorlage nach.

Des Weiteren muss erkannt werden, dass der linke Punkt A der zweite freie Punkt ist. Dieser wird allerdings im Zugmodus **nicht** bewegt und das ist völlig atypisch für einen freien Punkt. Die abhängigen Punkte B und D entstehen dann im weiteren Verlauf der Konstruktion als Schnittpunkte von Abstandskreisen mit geeigneten Radien.

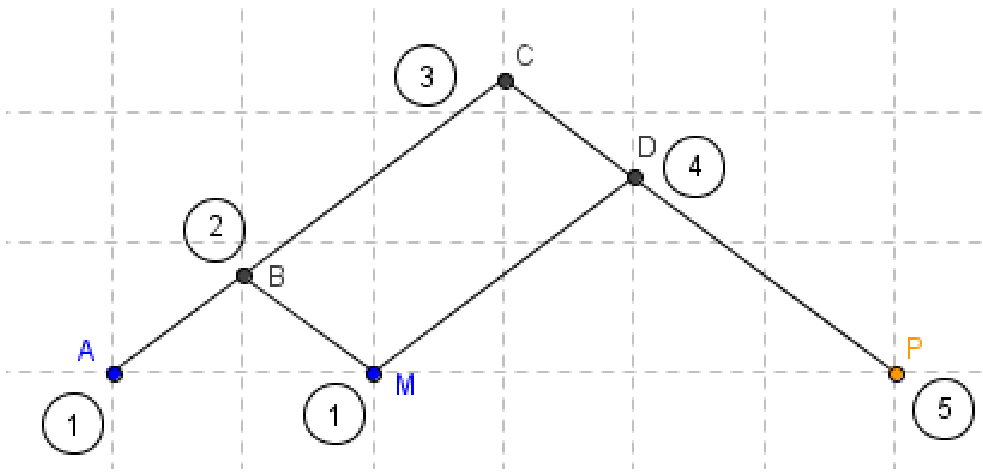


Abbildung 32: Konstruktion eines Pantographen-Models in einem DGS

Die Konstruktion widerspricht weiter der natürlichen Vorstellung, den Gelenkmechanismus zusammenzustecken, so wie Kinder das mit Legoteilen tun. Relational lässt sich der Pantograph wie folgt auffassen:

1. Die Strecken $\overline{BM}$ und $\overline{CD}$ sind parallel.
2. Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{MD}$ sind parallel.
3. Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BM}$ sind gleich lang.
4. Die Strecken $\overline{MD}$ und $\overline{DP}$ sind gleich lang.

Wenn man diese Bedingungen einer Software übermitteln könnte, dann ließe sich der Pantograph auf diese Weise relational umsetzen und Lernende hätten die Möglichkeit der Exploration. Wir werden im dritten Kapitel sehen, dass eine solche Software durch ein sogenanntes relationales Geometriesystem (RGS) gegeben ist und im fünften Kapitel werden wir einen Pantographen mit einem RGS erstellen.

2.4 Der Freiheitsgrad einer Konfiguration

Besteht eine geometrische Anordnung aus mehreren Objekten, die gewissen Einschränkungen unterliegen, so können wir der Gesamtkonfiguration eine Zahl zuordnen – den sogenannten Freiheitsgrad. Diesen Begriff erläutern wir an zwei Beispielen.

Beispiel 1: mathematisches Pendel

Ein mathematisches Pendel ist ein idealisiertes Pendel bestehend aus einem masselosen Faden der Länge l und einem punktförmigen Gewicht m, das reibungslos an dem Faden befestigt ist. In der Praxis heißt das, der Radius des kugelförmigen Gewichts ist klein im Vergleich zur Länge des Fadens und die Reibung ist vernachlässigbar.

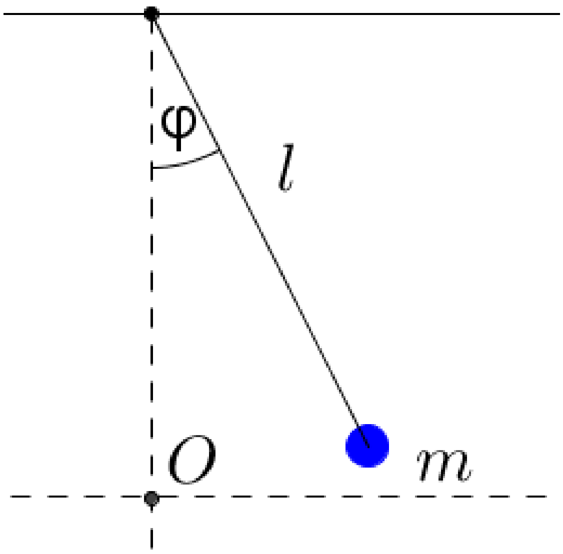


Abbildung 33: Ein mathematisches Pendel

Lenkt man die Kugel aus der Ruhelage O aus und lässt sie los, so führt sie bei kleinen Auslenkwinkeln φ bekanntlich harmonische Schwingungen um die Ruhelage aus.

Die Position der Kugel als Massepunkt wird eindeutig bestimmt durch die Angabe der kartesischen Koordinaten x und y innerhalb der Schwingungsebene mit dem tiefsten Punkt $O(0|0)$ als Nullpunkt. Allerdings ist der Faden gespannt, daher sind die kartesischen Koordinaten durch eine Gleichung miteinander verknüpft. Folglich reicht **eine** Größe aus, das System eindeutig zu beschreiben.

Eine Größe, die dieses System für jeden Zeitpunkt eindeutig beschreibt, ist gegeben durch den Auslenkwinkel φ. Man bezeichnet eine solche Größe als verallgemeinerte oder **generalisierte Koordinate**. Beim Übergang zu verallgemeinerten Koordinaten nutzt man typischerweise Symmetrien aus, so wie hier die Kreisbogensymmetrie.

Übrigens lässt sich auch in physikalischen Gleichungen das Prinzip der Gleichberechtigung der Variablen beobachten. So ergibt sich durch eine Kräftebilanz die gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung[4] des mathematischen Pendels:

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \cdot \sin\big(\varphi(t)\big) = 0$$

Hier stehen die Gravitationskonstante g, die Fadenlänge l und der jeweilige Auslenkwinkel φ gleichberechtigt nebeneinander. Allein der Auslenkwinkel φ ist funktional von der Zeit abhängig: $\varphi = \varphi(t)$ bzw. $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(t)$.

Beispiel 2: Gelenkmechanismus

Ein Gelenkmechanismus besteht aus mehreren festen Stangen, die durch Drehgelenke miteinander verbunden sind. Die sogenannte Basis ist bei der Benutzung üblicherweise fixiert, andere Teile sind durch die Drehgelenke beweglich.

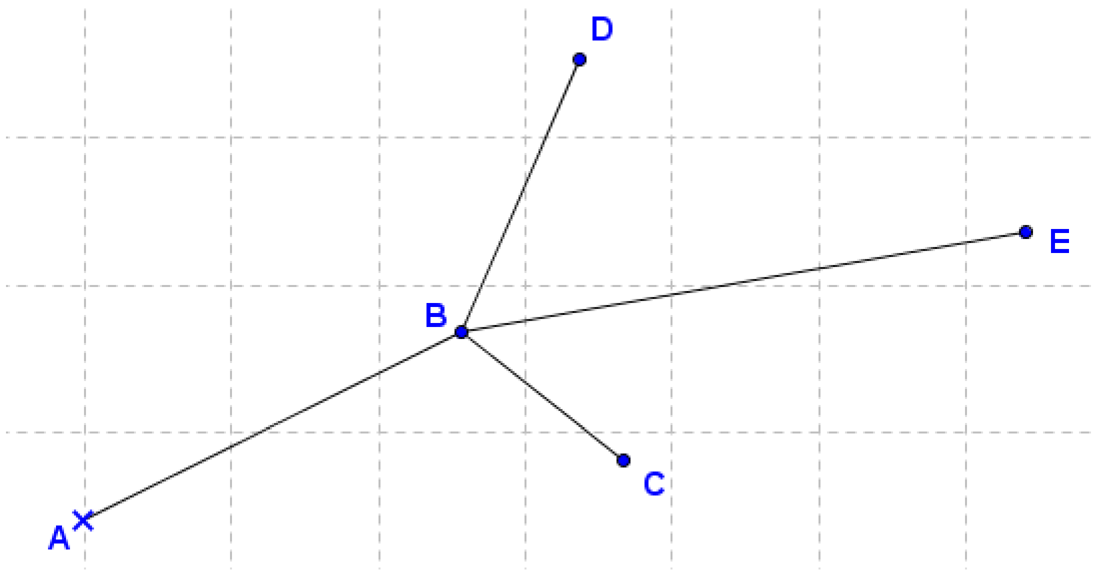


Abbildung 34: Modell eines Gelenkmechanismus mit Basis *A* und vier Stangen

Die Strecken in Abbildung 34 stellen die Stangen des Gelenkmechanismus dar, deren Längen fest sind. Das hat zur Folge, dass sich ein Punkt auf einer Kreisbahn bewegen lässt, wenn man ihn um einen Nachbarpunkt dreht. Dreht man zum Beispiel den Punkt B um A, so bewegen sich die an B gebunden Punkte C, D und E mit.

[4] Vgl. https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Pendel, zuletzt abgerufen am 18. April 2016

Wir wählen den Punkt A als Basis, A sei also fixiert. Zur präzisen Beschreibung der Bewegung von B um A genügt eine Größe, zum Beispiel der Drehwinkel. Daher besitzt der Punkt B den Freiheitsgrad 1. Analog können die Punkte C, D und E um B gedreht werden mit Freiheitsgrad 1. Folglich besitzt die gesamte Anordnung den Freiheitsgrad 4.

Der Freiheitsgrad des Systems kann reduziert werden, wenn man beispielsweise eine Stange zwischen D und E einfügt:

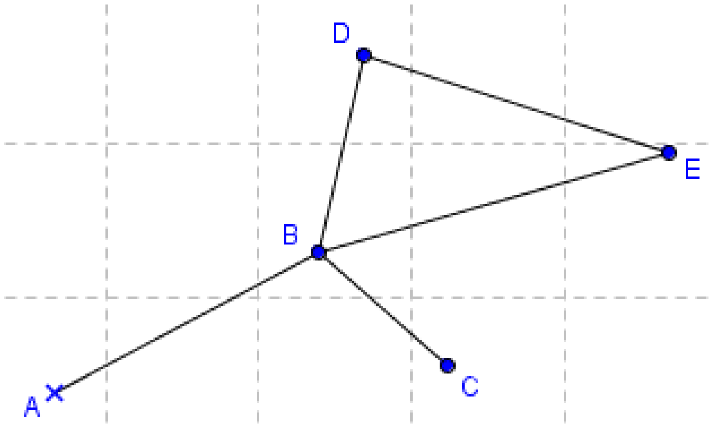


Abbildung 35: Modifizierter Gelenkmechanismus mit zusätzlicher Stange zwischen D und E

Die neue Konfiguration ist gegenüber der Ausgangskonfiguration nun eingeschränkt, denn in der neuen Konfiguration können die Punkte D und E nur noch zusammen bewegt werden, während in der Ausgangskonfiguration beide unabhängig voneinander gedreht werden können. Der Freiheitsgrad des Systems beträgt hier 3. Wir fügen zwischen A und C eine weitere Stange ein:

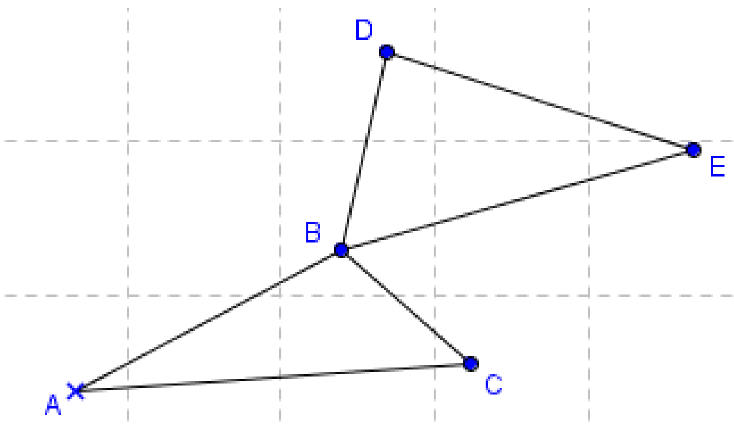


Abbildung 36: Eine weitere Stange wird zwischen A und C eingefügt.

Nun teilt sich die Konfiguration in die Dreiecke ABC und BDE auf, die beide durch den Punkt B miteinander verbunden sind. Der Freiheitsgrad hat sich auf 2 verkleinert. Jetzt sind keine vereinzelten Stangen mehr drehbar, sondern nur noch die beiden Dreiecke.

Eine weitere Stange zwischen A und D, C und D oder C und E hätte den Freiheitsgrad 1 des Systems zur Folge, denn die Anordnung wäre danach nur noch als Ganzes um A drehbar.

Wir halten als anschauliche Beschreibung fest:

Der **Freiheitsgrad** einer Konfiguration ist gegeben durch die **minimale** Anzahl der Größen, die das System eindeutig beschreiben.

Für eine Querverbindung zur Algebra bieten sich die linearen Gleichungssysteme (LGS) an, um das Konzept der Freiheitsgrade zu veranschaulichen. Der Freiheitsgrad eines LGS ist gegeben durch die Dimension des Lösungsraums.

2.5 Relationales Hauptprinzip zur Umsetzung einer Konfiguration und Rückwärtsarbeiten aus relationaler Sicht

Wir haben im Unterkapitel 2.2 am Beispiel der Parabel gesehen, inwiefern Lernende Probleme beim Rückwärtsarbeiten haben. Hier betrachten wir das Rückwärtsarbeiten aus relationaler Sicht, um dadurch dieses Konzept für Lernende leichter erfassbar zu machen. Dazu formulieren wir das relationale Hauptprinzip zur Umsetzung einer Konfiguration.

Beim Rückwärtsarbeiten geht man von der gewünschten Konfiguration aus, arbeitet sich hin zu den gegebenen Größen und versucht auf diesem Wege Informationen zu gewinnen, die für die gesuchte Konstruktionslösung nützlich sind. Man vertauscht also freie und abhängige Objekte miteinander und arbeitet rückwärts. Somit haftet diesem Begriff eine zeitliche Orientierung an. Das Prinzip der Vertauschung hingegen betont die Tätigkeit der Auswahl zwischen gegebenen und gesuchten Objekten. In der relationalen Sichtweise sind für die Umsetzung der Konfiguration die beteiligten Objekte und die Relationen, die zwischen ihnen bestehen, entscheidend. Im Allgemeinen wird eine Kombination bestimmter Relationen andere Relationen implizieren, es kommt also für die Umsetzung darauf an, entscheidende Relationen zu bestimmen.

Relationales Hauptprinzip zur Umsetzung einer Konfiguration

Für die Umsetzung einer Konfiguration ist entscheidend, dass alle **relevanten Relationen** erkannt und umgesetzt werden.

Beispiel 1: Sehnenviereck und Umkreis

Bei einem vorgegebenen Sehnenviereck kann der Mittelpunkt des Umkreises als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten konstruiert werden. Alternativ beginnt man mit dem Umkreis, setzt vier Punkte auf die Kreislinie und verbindet diese zu einem Sehnenviereck.

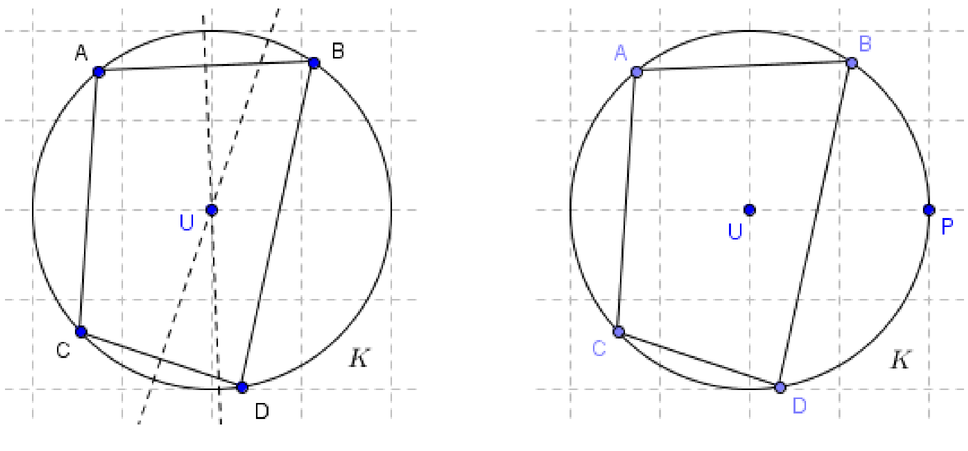


Abbildung 37: Die Konfiguration Sehnenviereck und Umkreis wird auf zwei verschiedene Arten erzeugt.

Für die Umsetzung der zweiten Konfiguration benötigt ein Lernender nicht das Wissen, wann ein Viereck ein Sehnenviereck ist, also wie er **irgendein** Sehnenviereck zum Zwecke der Exploration konstruiert. Beide Konfigurationen sind äquivalent in dem Sinne, dass in ihnen die gleichen relevanten Relationen gültig sind. Dementsprechend kann die zweite Konfiguration ebenfalls zur Exploration genutzt werden, zum Beispiel für den Satz, dass sich im Sehnenviereck gegenüberliegende Winkel zu 180° Grad ergänzen.

Tabelle 5: Gegenüberstellung beider Konfigurationen des Sehnenvierecks

	Freie Größen	**Abhängige Größen**	**Relevante Relationen**
Erste Konfiguration	Eckpunkte A,B,C,D	Viereck $ABCD$, Mittelsenkrechten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, Umkreismittelpunkt U, Umkreis K	Die Punkte A,B,C,D liegen auf K.
Zweite Konfiguration	Mittelpunkt U, Punkt P	Kreis K um U durch P, Punkte A,B,C,D	Die Punkte A,B,C,D liegen auf K.

In der ersten Konfiguration ist der Umkreismittelpunkt U eine abhängige Größe, in der zweiten Konfiguration hingegen ist U eine freie Größe. Beiden Konfigurationen gemeinsam sind die relevanten Relationen.

Beispiel 2: Gemeinsame Tangente zweier Kreise

Das Rückwärtsarbeiten und das Prinzip der Vertauschung von Größen greifen markanter bei komplexeren Konfigurationen. Als weiteres Beispiel betrachten wir die Konfiguration zweier Kreise K und K' und einer gemeinsamen äußeren Tangente t.

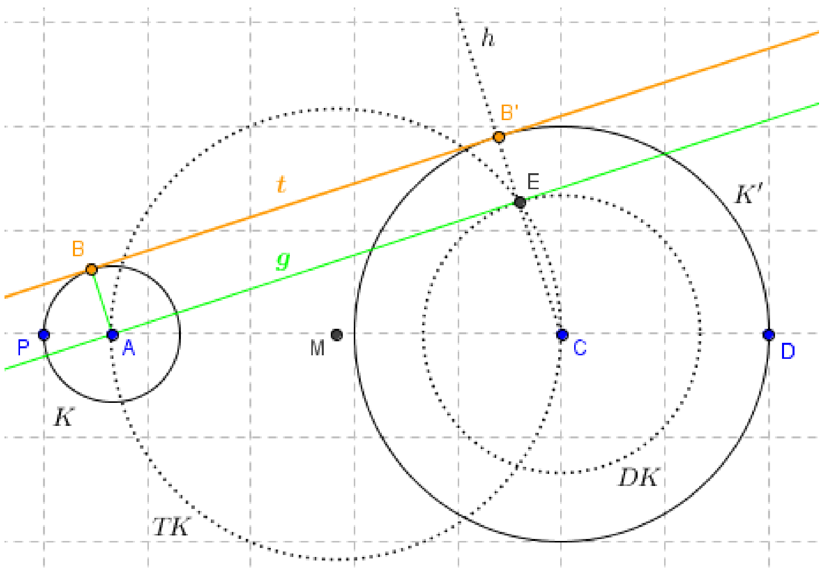


Abbildung 38: Konstruktion einer gemeinsamen äußeren Tangente t an zwei Kreise K und K'

Die Konstruktion der Tangente t ausgehend von den gegebenen Kreisen K und K' ist bei der ersten Begegnung mit dieser Fragestellung nicht trivial. Es werden zwei weitere Kreise benötigt: der Differenzkreis DK mit Mittelpunkt C und der Differenz der Kreisradien als Radius und der Thales-Kreis TK um M durch A. Mit den weiteren Hilfslinien $\overline{AB}$ und $\overline{AE}$ in Abbildung 38 folgt: Das Viereck $ABB'E$ ist ein Rechteck und t steht senkrecht auf den Kreisradien $\overline{B'C}$ und $\overline{BA}$, folglich ist t eine gemeinsame Tangente. Des Weiteren existiert eine zweite äußere Tangente t', die zusammen mit t bzgl. der Strecke $\overline{AC}$ spiegelsymmetrisch liegt.

Bei der alternativen Variante arbeitet man wiederum rückwärts und beginnt dementsprechend mit der gesuchten Tangente t und den beiden späteren Berührpunkten B und B', die auf t frei beweglich sind.

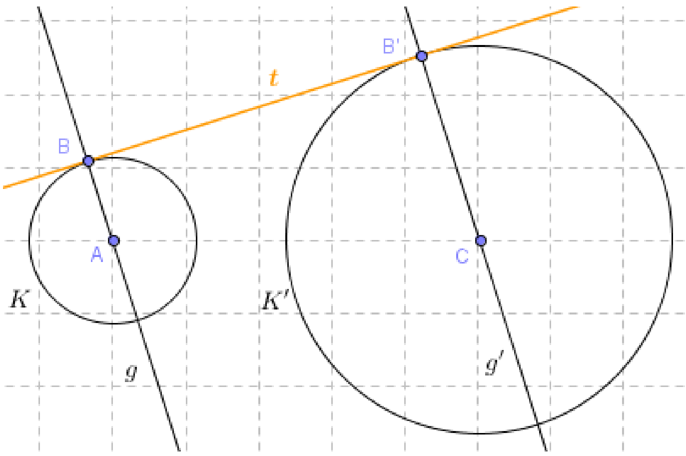


Abbildung 39: Beim Rückwärtsarbeiten beginnen wir mit einer Gerade t, der späteren gemeinsamen Tangente der beiden Kreise K und K'.

Die Gerade t steht jeweils senkrecht auf dem Radius $\overline{AB}$ und $\overline{CB'}$, folglich liegt t tangential zu den Kreisen K und K'.

In der ersten Konfiguration sind die Berührpunkte B und B' und damit die Tangente t abhängige Größen. In der zweiten Konfiguration ist die Tangente eine freie Größe und die Berührpunkte B und B' lassen sich entlang t verschieben.

Tabelle 6: Gegenüberstellung beider Konfigurationen zwei Kreise und gemeinsame Tangente

	Freie Größen	**Abhängige Größen**	**Relevanten Relationen**
Erste Konfiguration	Kreise K und K'	Gerade t	$\overline{BM} \perp t, \overline{B'M'} \perp t$ bzw. t berührt K und K'
Zweite Konfiguration	Gerade t	Kreise K und K'	$\overline{BM} \perp t, \overline{B'M'} \perp t$ bzw. t berührt K und K'

Im Kontext des Problemlösens besteht der Sinn des Rückwärtsarbeitens darin, die gewünschte Konfiguration zu explorieren, um damit Hinweise für die eigentliche Lösung zu gewinnen.

Obige Konfigurationen ließen sich noch schneller umsetzen, wenn ein Benutzer die gewünschten Relationen **direkt** übermitteln könnte. Das würde im Beispiel der gemeinsamen Tangente bedeuten, dass zunächst zwei Kreise K und K' und eine Gerade t erzeugt werden und dann die Relationen übermittelt werden, dass die Gerade t sowohl den Kreis K als auch den Kreis K' berühren soll. Das ist mit einem relationalen Geometriesystem (RGS) möglich. Wir besprechen den theoretischen Rahmen solcher Systeme im Unterkapitel 3.5 und stellen aktuelle Vertreter im Unterkapitel 3.8 vor.

Das Prinzip der Vertauschung ist eng verknüpft mit dem klassischen Paar Aufgabe und Umkehraufgabe. Das Denken in Relationen betont die Einheit beider Sichtweisen, das heißt Aufgabe und Umkehraufgabe sind unterschiedliche Betrachtungsweisen auf zwei äquivalente Konfigurationen. Auf der Ebene der beteiligten Größen benutzen wir die Metapher der Gleichberechtigung. So liegen eine Gerade t und ein Kreis K tangential zueinander. Es ist bei dieser Betrachtung nicht entscheidend, welche Größe zuerst im Konstruktionsprozess entstanden ist bzw. welche Größe von welcher Größe funktional abhängt.

3 Relationale Geometriesoftware in Abgrenzung zu dynamischer Geometriesoftware

In diesem Kapitel fassen wir zuerst die Grundlagen dynamischer Geometriesoftware (DGS) zusammen. Danach beschreiben wir das in solchen Systemen bekannte prinzipielle Spannungsverhältnis zwischen Stetigkeit und Determiniertheit und entdecken eine neue Art von Unstetigkeit: diejenige auf der begrifflichen Ebene. Wir betrachten weiter relationale Werkzeuge in DGS und formulieren den theoretischen Rahmen der RGS. Schließlich untersuchen wir zwei aktuelle Vertreter der RGS und stellen DGS und RGS vergleichend gegenüber.

3.1 Dynamische Geometriesoftware (DGS)

Dynamische Geometriesoftware (DGS) bildet Zirkel und Lineal virtuell ab. Ein DGS erlaubt das geometrische Konstruieren am Computer ähnlich wie auf Papier, allerdings bietet ein DGS gegenüber dem Papier den sogenannten Zugmodus. Mit diesem wird die Geometrie dynamisch, genauer gesagt kinematisch, aber der erste Begriff hat sich durchgesetzt. Im Zugmodus können (manche) Punkte mit der Maus nachträglich verschoben werden. Dabei bleiben die funktionalen Zusammenhänge zwischen den geometrischen Objekten bestehen, so bleibt etwa ein konstruierter Mittelpunkt einer Strecke deren Mittelpunkt.

Beispiel Mittelpunkt einer Strecke

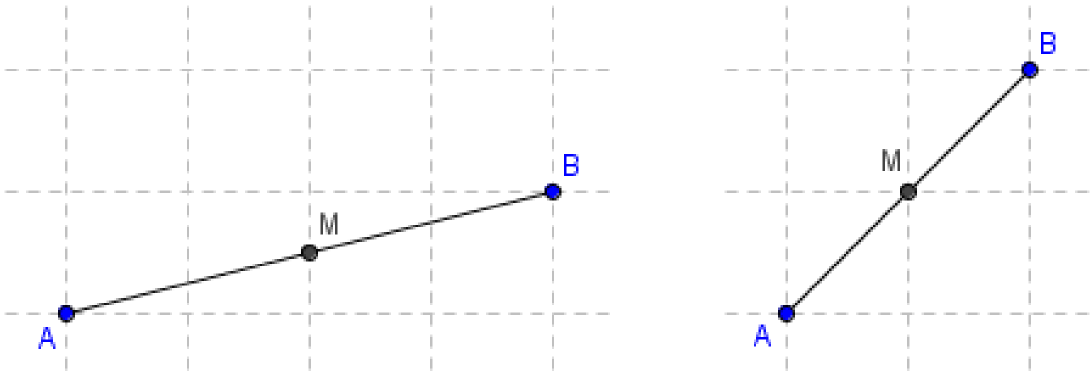


Abbildung 40: Eine Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M, bevor (links) und nachdem (rechts) an B gezogen wurde

Die beiden Konfigurationen der Abbildung 40 bestehen aus sogenannten **freien** Punkten A und B, der Strecke $\overline{AB}$ und dem Mittelpunkt M dieser Strecke. An A und B kann mit der Maus im Zugmodus beliebig gezogen werden, dabei bleibt M der Mittelpunkt der Strecke, denn als solcher wurde er konstruiert.

Am Punkt M kann in einem DGS nicht gezogen werden, denn er hängt von A und B ab, das heißt die Lage von M ist durch die Lage von A und B bestimmt: M liegt in der Mitte der Strecke $\overline{AB}$. Möchte man die Lage von M verändern, geht das nur indirekt über einen Zug an A oder B. Hinter diesem einfachen Beispiel verbirgt sich ein grundlegendes Prinzip.

Funktionales Prinzip

Neue Objekte, die aus bereits existierenden entstehen, hängen von diesen funktional ab.

Bemerkungen

1. In einem DGS kann nur an den freien Punkten gezogen werden. Die freien Punkte stehen zeitlich am Anfang einer Konstruktion.

2. Die Positionen abhängiger Objekte lassen sich nicht direkt, sondern nur indirekt verändern. So kann zum Beispiel die Lage des Mittelpunktes M in der obigen Konfiguration durch Ziehen an den freien Punkten A oder B indirekt verändert werden. Es ist in aktuellen DGS zwar möglich, Strecken als Ganzes zu verschieben oder sogar das gesamte virtuelle Zeichenblatt, aber es ist nicht möglich, direkt am Punkt M zu ziehen und auf diese Weise seine Position zu verändern.

3. Das funktionale Prinzip gilt für jeden Schritt einer Konstruktion.

4. Funktionale Abhängigkeiten bleiben im Zugmodus erhalten.

Aktuelle Vertreter von DGS sind EUKLID DynaGeo (R. MECHLING) und GeoGebra (M. HOHENWARTER und Team). In [Graumann et al. 96, S. 197] formulieren die Autoren die bekannte **Definition eines DGS**:

„*Unter DGS verstehen wir Programme,*

1. *die eine euklidisch geprägte Schulgeometrie und deren traditionelle Werkzeuge auf dynamische Weise modellieren (Zugmodus) ,*

2. *eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen zu einem neuen Befehl zusammenfassen können (Makro),*

3. *und auf Wunsch die Bahnbewegung von Punkten visualisieren, die in Abhängigkeit zu anderen Punkten stehen (Ortslinie).*“

Anschaulich gesprochen bietet ein DGS also zunächst die gleichen Möglichkeiten wie Papier, Bleistift, Lineal und Zirkel. Darüber hinaus ermöglicht ein DGS durch den Zugmodus bewegte Geometrie: Ist etwa wie oben beschrieben ein Punkt M als Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ konstruiert, so bleibt er deren Mittelpunkt, wenn man an A oder an B zieht.

Durch den Zugmodus werden vereinzelte Konfigurationen erzeugt. Diese kann man sich als Einzelbilder eines Daumenkinos oder als Dias vorstellen. Der fachmathematische Rahmen basiert auf dem Begriff der Zugfigur, vgl. [ElGaHe00].

In der obigen Definition ist nicht explizit die Rede von freien und abhängigen Punkten. Diese Unterscheidung ergibt sich aus der Formulierung „*der euklidisch geprägten Schulgeometrie*“. Dort beginnt eine Konstruktion immer mit den freien Punkten und Objekte, die zeitlich später entstehen, hängen funktional von bereits existierenden Objekten ab.

Wir werden im Unterkapitel 3.5 sehen, dass diese Unterscheidung wichtig für die Abgrenzung zwischen DGS und den sogenannten relationalen Geometriesystemen ist.

Ein Model für die interne Darstellung von Konstruktionen: gerichtete Graphen

Funktionale Abhängigkeiten können in einem sogenannten gerichteten Graphen veranschaulicht werden. Die Konfiguration einer Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M aus Abbildung 40 sieht in einem gerichteten Graphen folgendermaßen aus.

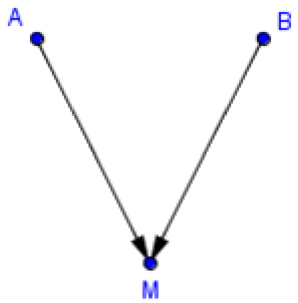


Abbildung 41: Gerichteter Graph der Konfiguration Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M

Hierbei bedeutet der Pfeil →, dass das Zielobjekt von Ausgangsobjekten abhängt. Man liest den Graphen in Richtung der Pfeile. Im Beispiel der Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M hängt M von A und von B ab. Ein gerichteter Graph stellt die funktionalen Abhängigkeiten einer Konstruktionsbeschreibung graphisch dar, wir werden daher auch den Begriff Abhängigkeitsgraph verwenden.

Wir ergänzen zu dieser Konfiguration einen Kreis K um M durch B und erhalten als gerichteten Graphen die nächste Abbildung.

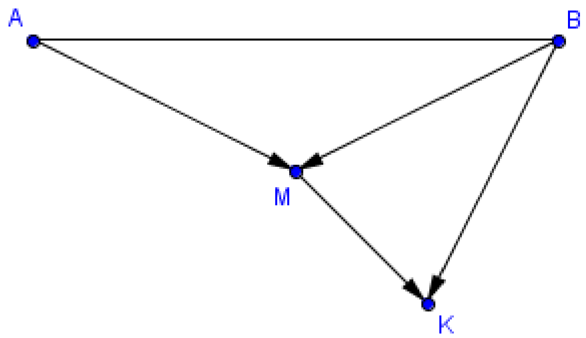


Abbildung 42: Der gerichtete Graph nach Hinzufügen des Kreises K mit Mittelpunkt M durch B

Der Mittelpunkt M hängt weiterhin von den Punkten A und B an, der Kreis K hängt von den Punkten M und B ab.

Würde man den Kreis K um M durch den Punkt A (anstatt B) betrachten, so würde sich wegen der Symmetrie eine äquivalente Konfiguration mit gleichem Verhalten im Zugmodus ergeben, jedoch hätte der gerichtete Graph dieser Konfiguration ein anderes Aussehen.

3.2 Stetigkeit versus Determiniertheit: das Problem der springenden Punkte

Hier besprechen wir den gleichnamigen Abschnitt der Hilfe in der Benutzeroberfläche von EUKLID DynaGeo [Mechling12] als geschichtliche Grundlage des Stetigkeitsbegriffes in einem DGS.

Ende der 80er Jahre kam Cabri Géomètre als erstes DGS auf den deutschen Markt. Die damit verbundenen didaktischen Möglichkeiten wurden kontrovers diskutiert. Im Rahmen dieser Debatte wurden zwei Forderungen an ein DGS gestellt:

> *„Determinismus-Forderung: Wenn der Benutzer nach dem Verziehen einer Zeichnung alle Basisobjekte in ihre ursprüngliche Lage zurückbringt, dann sollen auch alle abhängigen Objekte wieder in ihrer ursprünglichen Lage sein.*
>
> *Stetigkeits-Forderung: Wenn ein Basisobjekt um ein kleines Stück verschoben wird, dann sollen sich alle abhängigen Objekte ebenfalls nur um ein kleines Stück verschieben.“* [Mechling12]

Bei der Determinismus-Forderung liegt die Betonung auf dem aktuellen Zustand: Eine Konfiguration darf kein „Gedächtnis“ besitzen. Konfigurationen sind folglich reversibel. Die Stetigkeitsforderung hingegen besagt, dass es im Zugmodus in einer Konfiguration keine springenden Objekte geben soll.

Beide Forderungen erscheinen zunächst völlig natürlich und sich nicht zu widersprechen. Bei *linearen* Konstruktionen[5] sind beide Forderungen leicht zu erfüllen, allerdings treten bei der Umsetzung nicht-linearer Konstruktionen auf der Software-Ebene prinzipielle Schwierigkeiten auf:

Beispiel 1: Eine deterministische, unstetige Konfiguration

Wir betrachten eine Konfiguration in einem DGS bestehend aus zwei kongruenten Kreisen mit Mittelpunkten A bzw. B auf einer Geraden g und der Strecke zwischen dem oberen Schnittpunkte S der Kreise und einem freien Punkt P.

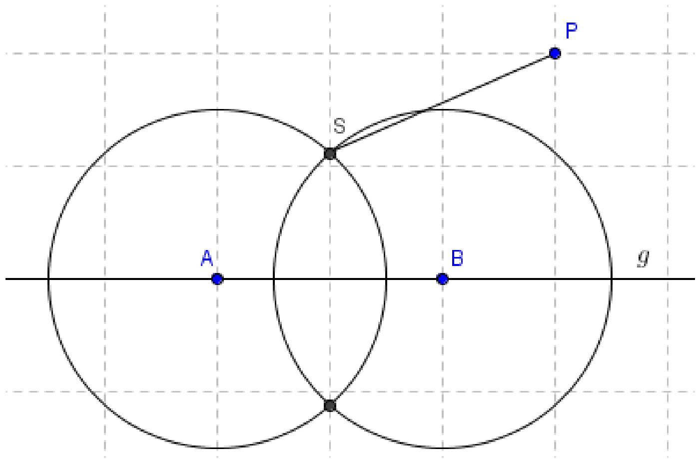


Abbildung 43: Eine deterministische, unstetige Konfiguration

[5] Das sind Konstruktionen, in denen ausschließlich Punkte, Strecken, Halbgeraden und Geraden auftreten, also keine Kreise.

Ausgehend von der Konfiguration in Abbildung 43 verschieben wir den Punkt A auf der Geraden g nach rechts auf den Punkt B zu. Dabei bewegt sich der linke Kreis ebenfalls nach rechts wie in der nächsten Abbildung dargestellt.

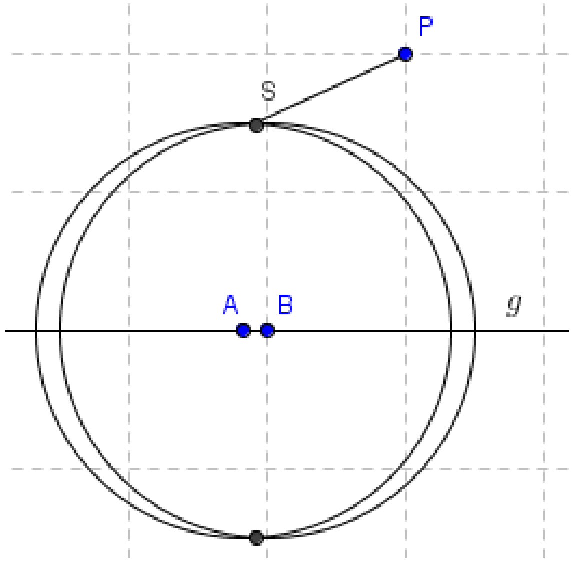


Abbildung 44: Wir bewegen den Punkt *A* hin zum Punkt *B*.

Im Grenzfall, dass die Punkte A und B miteinander inzidieren, inzidieren auch die beiden Kreise. Dann gibt es nicht mehr zwei, sondern unendlich viele Schnittpunkte, aber der Schnittpunkt S verschwindet in der Darstellung des DGS, ebenso der untere Schnittpunkt.

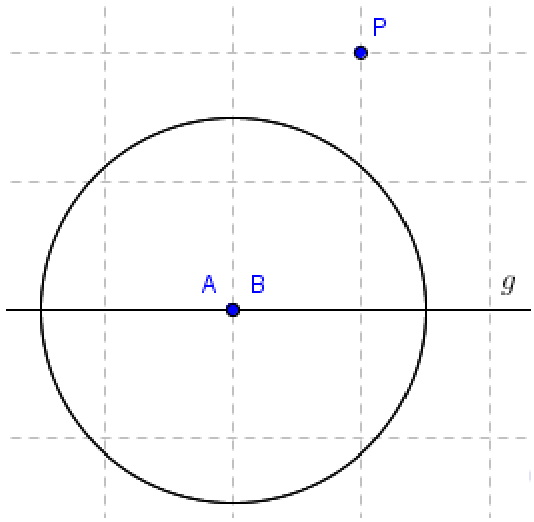


Abbildung 45: *A* und *B* fallen zusammen, es gibt unendlich viele Schnittpunkte und *S* ist verschwunden.

Was passiert nun, wenn wir den Punkt A auf der Geraden g ein Stück weiter nach rechts verschieben?

Sicherlich existieren dann wieder genau zwei Schnittpunkte und die Strecke $\overline{SP}$ müsste demzufolge wieder erscheinen. Diese Erwartung erfüllt sich, allerdings springt der Punkt S von oben nach unten und damit springt auch die Strecke $\overline{SP}$, das heißt diese Konfiguration ist nicht stetig.

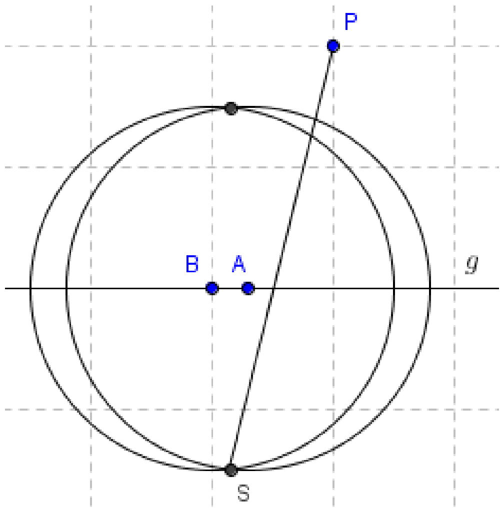


Abbildung 46: Der Schnittpunkt S ist nach unten gesprungen und mit ihm die Strecke $\overline{SP}$.

Verschieben wir nun den Punkt A in der Konfiguration von Abbildung 46 nach links, dann erhalten wir die Ausgangskonfiguration, die Konfiguration ist somit reversibel, also ist Determinismus gegeben.

Beispiel 2: Eine stetige, nicht deterministische Konfiguration (Winkelhalbierende)

Wir entnehmen die folgende Konfiguration und die zugehörigen Beobachtungen der Hilfe [Mechling12] von EUKLID DynaGeo. Die Konfiguration bestehe aus zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit gemeinsamen Anfangspunkt A, der zugehörigen Winkelhalbierenden w und einem Punkt P auf w.

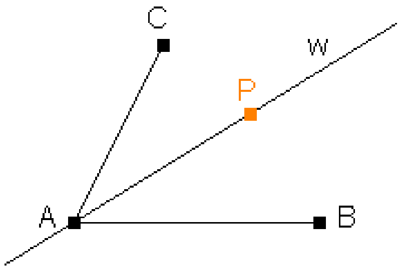


Abbildung 47: Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$, die Winkelhalbierende w und ein Punkt P auf w

Hierbei sind A,B und C freie Punkte. Der Punkt P wurde durch das Werkzeug *Punkt auf Linie* erzeugt. Nun verschieben wir C auf einem gedachten Kreis gegen den Uhrzeigersinn. Dabei wandert die Winkelhalbierende w und mit ihr der Punkt P dynamisch mit.

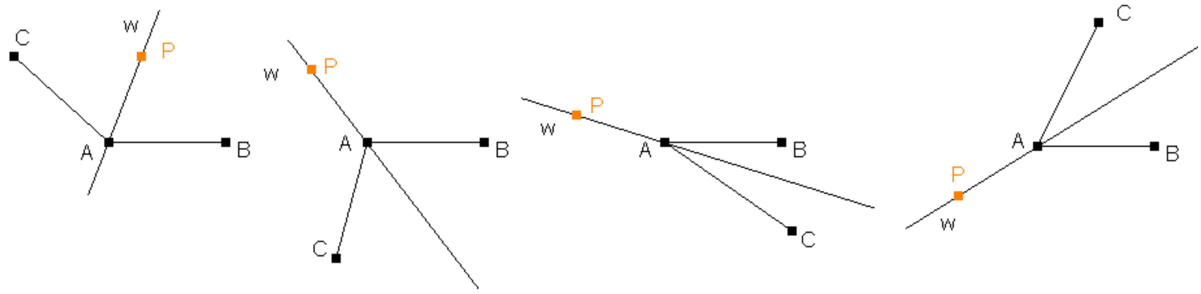


Abbildung 48: Wir verschieben den Punkt C im Gegenuhrzeigersinn.

Nach einem vollen Umlauf von 360° des Punktes C befinden sich die freien Objekte wieder in der Ausgangslage, allerdings gilt dies nicht für alle abhängigen Objekte, denn der Punkt P liegt nun auf der anderen Seite von A im Vergleich zur Ausgangskonfiguration: Die Winkelhalbierende w hat ihre Orientierung geändert. Folglich ist diese Konfiguration nicht deterministisch, aber stetig. R. MECHLING formuliert in den Hilfeseiten seines Programms:

> *„Eine nähere Betrachtung zeigt, dass die Zeichenfläche mit der Einführung des Zugmodus von der Euklidischen Ebene zur Riemannschen Fläche zu mutieren droht: Je nach Konstruktion kann sie nun mehrfach überdeckt sein, d.h. mehrere Varianten zur selben Konfiguration der Basisobjekte (und das heißt auch: zur selben Konstruktionsbeschreibung!) enthalten. Und auf welchem „Blatt“ wir uns gerade befinden (d.h. welche Variante wir gerade sehen), darüber entscheidet die Vorgeschichte der Zeichnung. Die Determinismusforderung kann nun als der Versuch gesehen werden, die einfache Euklidische Ebene auch im Zugmodus zu retten. Sie bedeutet letztlich, dass die Zeichnung kein Gedächtnis haben darf: Die Lage aller abhängigen Objekte der Zeichnung soll vollständig durch die Lage der Basisobjekte determiniert sein und nicht von deren Vorgeschichte abhängen, also davon, wie sich diese Objekte zuvor bewegt haben.“* [ebenda]

Wir halten als Resultat fest:

- Wenn man Determinismus fordert, ist die Eigenschaft der Stetigkeit nicht mehr garantiert.
- Wenn man Stetigkeit fordert, ist die Eigenschaft des Determinismus nicht mehr garantiert.

In GeoGebra ist die Konfiguration der Winkelhalbierenden unstetig, aber deterministisch.

Obwohl beide Forderungen zunächst natürlich und widerspruchsfrei erscheinen, zeigen diese Beispiele, dass sie grundsätzlich nicht vereinbar sind. Erst Ende der 90er Jahre kam mit Cinderella von U. KORTENKAMP ein DGS auf den Markt, das die Stetigkeitsforderung konsequent erfüllt. Studiert man zugehörige Veröffentlichungen wie zum Beispiel [ElGaHe00], so kommt man zu dem Schluss, dass die Stetigkeitsforderung prinzipiell deutlich schwieriger zu erfüllen ist als die Determinismusforderung. In EUKLID DynaGeo hat ein Benutzer in den sog. Experten-Optionen[6] die bemerkenswerte Wahl, ob er der Stetigkeit oder dem Determinismus den Vorzug gibt:

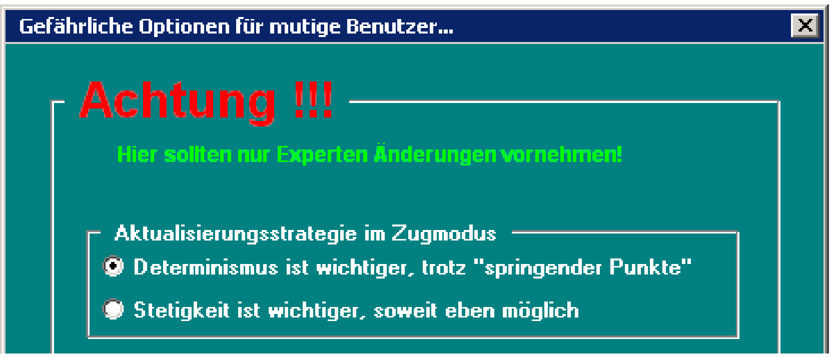


Abbildung 49: Die Gretchen-Frage Determinismus versus Stetigkeit bei EUKLID DynaGeo

[6] Diese Experten-Optionen finden Sie in der Hauptleiste unter dem Punkt „Verschiedenes“, dann wählen Sie „Einstellungen“ aus.

3.3 DGS-Unstetigkeit auf der begrifflichen Ebene: Parallelogramm springt zum Trapez

Bei der Beschäftigung mit der Thematik Stetigkeit in einem DGS habe ich mit mehreren Konfigurationen experimentiert und bin bei der Konstruktion eines Parallelogramms mit GeoGebra auf das folgende Phänomen gestoßen.

Ausgehend von drei Basispunkten A, B und C erstellen wir die Geraden g durch A und B und die Parallele h zu g durch den Punkt C.[7] Dann konstruieren wir den Kreis K um B durch C und den Kreis K' um A mit jeweils gleichem, hinreichend großem Radius. K' schneidet die Parallele h in den Punkten D und D'. Wir erhalten somit das Parallelogramm $ABCD$:

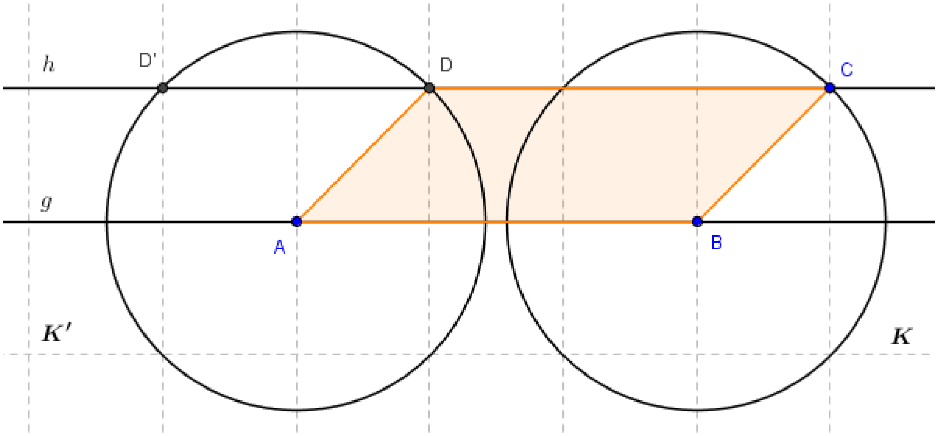


Abbildung 50: Konstruktion eines Parallelogramms $ABCD$ in GeoGebra

Verschiebt man nun den Punkt C nach links, so rücken die Punkte D und D' zusammen und inzidieren im Grenzfall eines Rechtecks.

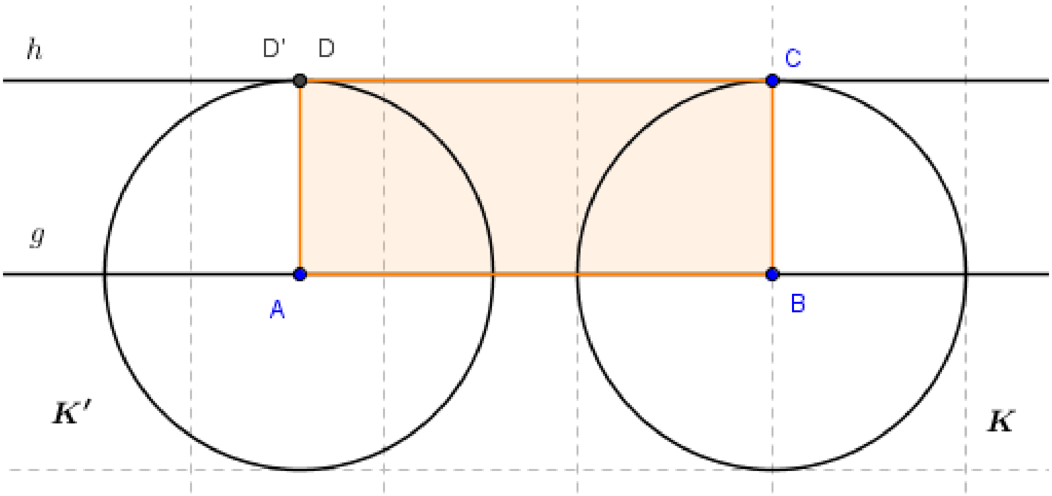


Abbildung 51: Das Parallelogramm wird im Grenzfall zum Rechteck.

Verschiebt man den Punkt C weiter nach links, so entfernen sich D und D' voneinander und das Parallelogramm wird zum Trapez, ohne dass ein Punkt „springt".

[7] Im Zugmodus wird die Konfiguration stabiler, wenn der Punkt C als „Punkt auf Linie" auf einer vorgegebenen Parallelen h gesetzt wird. Allerdings möchte ich mich beim Untersuchen von Unstetigkeit in einem DGS auf die rein konstruktiven Werkzeuge beschränken.

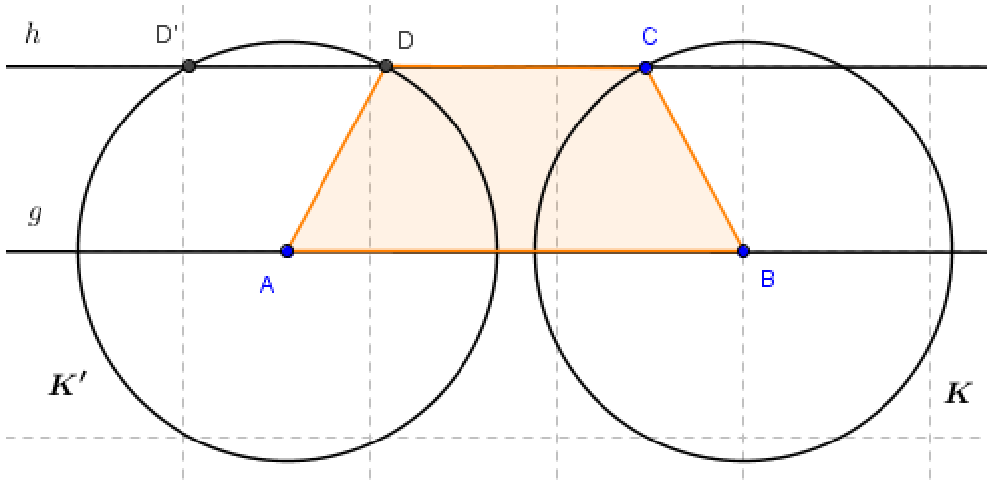


Abbildung 52: Das Parallelogramm wird zum Trapez.

Offenbar liegt die Ursache dieses Verhaltens an der Doppeldeutigkeit der Schnittpunkte der Geraden h mit dem Kreis K'.

Bewegt man den Punkt C nun zurück in seine Ausgangsposition, so wird das Trapez wieder zum Parallelogramm. Die Konfiguration ist reversibel, also ist hier Determinismus gesichert. Verschiebt man die freien Punkt ein wenig, so verschieben sich die abhängigen Objekte ebenfalls wenig, folglich ist Stetigkeit gegeben.

Hier liegt eine **Unstetigkeit auf der begrifflichen Ebene** vor: Das Parallelogramm wird zum Trapez.

GeoGebra und EUKLID DynaGeo zeigen obiges Verhalten, Cinderella hingegen nicht, vgl. [Kortenkamp99, S. 88]. KORTENKAMP formuliert sinngemäß, dass nicht Stetigkeit das direkte Ziel ist, das man anstreben sollte, sondern Analyzität: Die abhängigen Punkte sollen im Sinne der Funktionentheorie vom beweglichen Basisobjekt abhängen. Diese Aussage wird in [Kortenkamp99, S. 58 ff., S.108 ff. und S. 151 ff.] fachwissenschaftlich dargestellt.

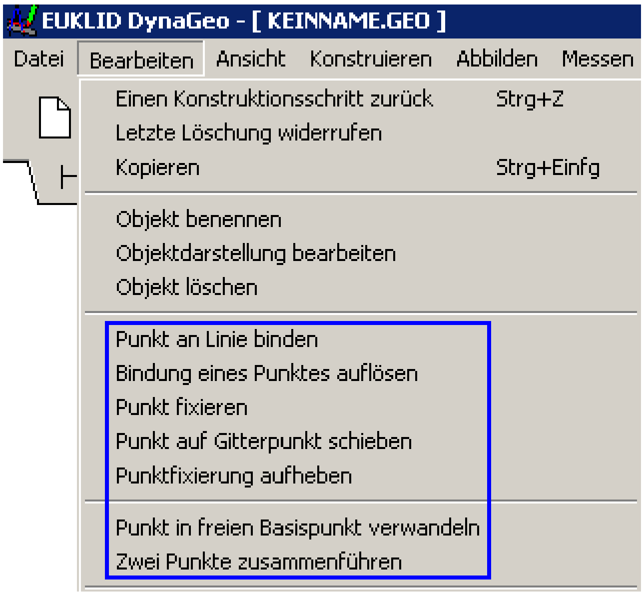
3.4 Relationale Werkzeuge in DGS

Wie oben beschrieben ermöglichen DGS bewegte Geometrie mit Zirkel und Lineal als Grundlage, allerdings verfügen einige DGS auch über Werkzeuge, die darüber hinausgehen:

Definition: ***Relationales Werkzeug***

Ein relationales Werkzeug ist ein Werkzeug, das eine Relation oder eine Einschränkung in der Konfiguration umsetzt.

In EUKLID DynaGeo gibt es zum Beispiel die relationalen Werkzeuge *Strecke fester Länge, Punkt auf Linie*, *Punkt fixieren*, *Punkt in freien Basispunkt verwandeln* und weitere. Diese Werkzeuge werden in EUKLID DynaGeo nicht als relational bezeichnet. Man findet sie etwas unsystematisch verteilt unter dem Menüunterpunkt Bearbeiten, auf der Konstruktionsleiste der Werkzeuge und auf die Hauptleiste.



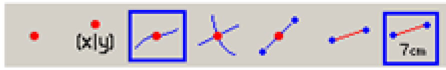
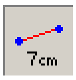


Abbildung 53: In EUKLID DynaGeo befinden sich relationale Werkzeuge (blau eingerahmt).

Wir gehen nun auf die eingerahmten relationalen Werkzeuge der Abbildung 53 ein. Anschließend untersuchen wir das Zusammenspiel mehrerer relationaler Werkzeuge.

Im folgenden Abschnitt beziehe ich mich wieder auf [Mechling12], genauer gesagt auf die Hilfserklärungen zum jeweiligen Befehl in EUKLID.

1. *Strecke fester Länge* 

Mit dem Werkzeug *Strecke fester Länge* wird eine Strecke bestehend aus Anfangs- und Endpunkt mit einer wählbaren Länge erzeugt. Nach dem Erzeugen kann diese Strecke verschoben werden und behält dabei ihre Länge. Weiter ist es möglich, den Zahlenwert der Länge nachträglich zu ändern, in dem ein Benutzer die Strecke mit der rechten Maustaste auswählt.

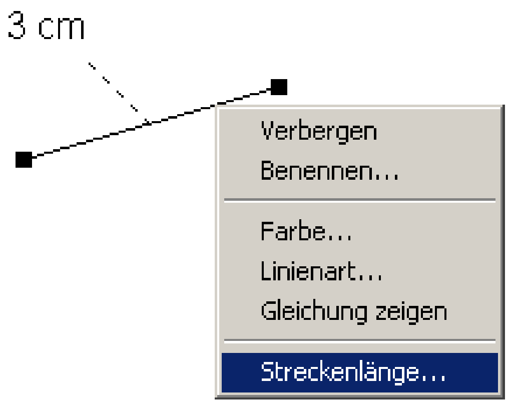


Abbildung 54: Der Zahlenwert der Streckenlänge kann nachträglich geändert werden.

Außerdem kann ein Benutzer mit diesem Werkzeug die Länge einer freien Strecke auf einen konkreten Zahlenwert einschränken: Eine Strecke $\overline{AB}$ werde aus den zwei freien Punkten A und B konstruiert. Nun wählen wir in der Werkzeugleiste das Werkzeug *Strecke fester Länge* aus. Es öffnet sich ein Dialogfenster, in dem wir die gewünschte Länge eingeben.

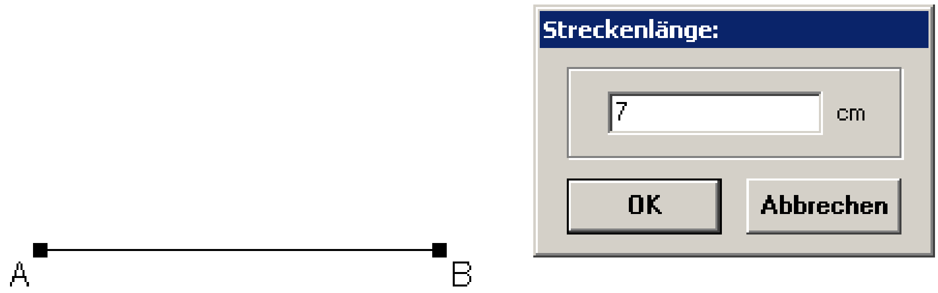


Abbildung 55: EUKLID DynaGeo erwartet als Eingabe die gewünschte Länge.

Danach klicken wir nacheinander die Punkte A und B an, um die gewünschte Länge zu übermitteln, zum Beispiel 7 cm. Zur Probe lassen wir die Strecke $\overline{AB}$ messen:

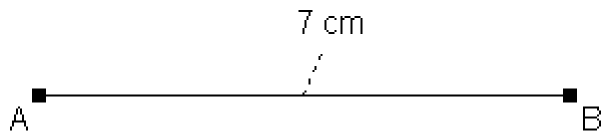
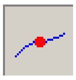


Abbildung 56: Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ hat sich auf den gewünschten Wert geändert.

Danach können wir die Strecke im Zugmodus verschieben, die Länge bleibt dabei erhalten. Das bedeutet, dass mit dem Werkzeug *Strecke fester Länge* eine Einschränkung an die Länge einer zuvor freien Strecke realisiert wurde.

2. *Punkt auf Linie* 

Das Werkzeug *Punkt auf Linie* erzeugt einen gebundenen Punkt auf einer Linie, zum Beispiel einer Geraden, einer Strecke oder einem Kreis. Somit ist der Punkt auf Linie eine Mischform aus einem freien Punkt und einem abhängigen Punkt.

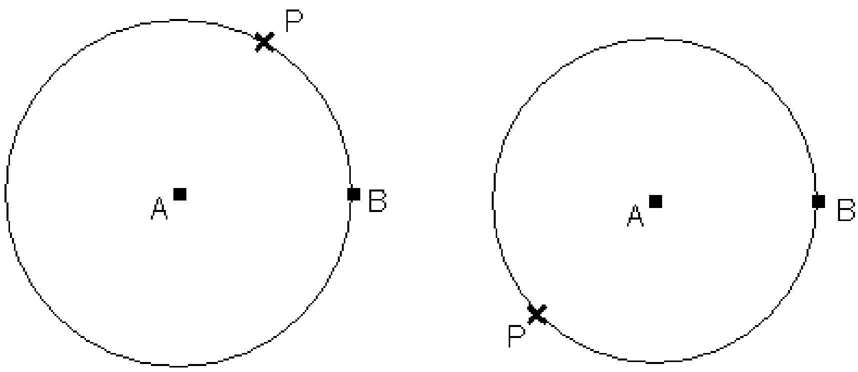
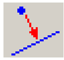
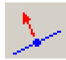


Abbildung 57: Der Punkt *P* ist durch das Werkzeug Punkt auf Linie an die Kreislinie gebunden.

Standardmäßig wird in EUKLID DynaGeo ein Punkt auf Linie nicht optisch von den freien Punkten unterschieden. In Abbildung 57 wurde die Punktform von P händisch geändert, von einem schwarzen Quadrat ■ zu einem Kreuz ✕.

Ein weiteres Beispiel für einen gebundenen Punkt auf einer Linie haben wir bereits gesehen: Bei der Parabelkonstruktion im Abschnitt 2.2 ist der Lotfußpunkt L von diesem Typ.

3. *Punkt an Linie binden*  *und Bindung eines Punktes auflösen* 

Diese beiden Werkzeuge finden sich in der Hauptleiste von EUKLID DynaGeo. Das Werkzeug *Punkt an Linie binden* wird angewandt auf einen Punkt P und eine Linie L. Es führt dazu, dass ein bis dahin freier Punkt P anschließend auf der Linie L fixiert ist.

Ein Benutzer erhält eine gleichwertige Konfiguration, wenn er direkt auf der Linie L einen *Punkt auf Linie* erzeugen würde. Das Werkzeug *Bindung eines Punktes auflösen* hebt eine zuvor gesetzte Bindung wieder auf. In diesem Sinne handelt es sich hierbei um ein Paar von Umkehrwerkzeugen.

4. *Punkt fixieren* und *Punkt auf Gitterpunkt schieben*

Das Werkzeug *Punkt fixieren* ändert einen freien Punkt hin zu einem Punkt mit festen Koordinaten, so dass er nicht mehr bewegt werden kann. Wenden wir dieses Werkzeug auf den Startpunkt A einer Strecke $\overline{AB}$ an, so lässt sich anschließend nur noch die Lage des freien Punktes B ändern.

In den Standardeinstellungen wird ein fixierter Punkt mit einem schwarzen Quadrat mit weißem Zentrum ◘ markiert. Wendet man das Werkzeug *Punkt auf Gitterpunkt schieben* auf einen freien Punkt an, so ist dieser anschließend auf dem Gitterpunkt fixiert, der am nächsten liegt.

5. *Punkt in freien Basispunkt verwandeln*

Mit dem Werkzeug *Punkt in freien Basispunkt verwandeln* kann ein Benutzer einen konstruierten oder fixierten Punkt in einen freien Basispunkt verwandeln. Dabei werden diejenigen funktionalen Abhängigkeiten aufgelöst, die aussagen, von welchen Objekten der betreffende Punkt funktional abhängt, aber die von diesem Punkt ausgehenden funktionalen Abhängigkeiten bleiben erhalten.

Wir betrachten zur Veranschaulichung eine Konfiguration bestehend aus einer Strecke $\overline{AB}$, deren Mittelpunkt und einem Kreis um M durch A.

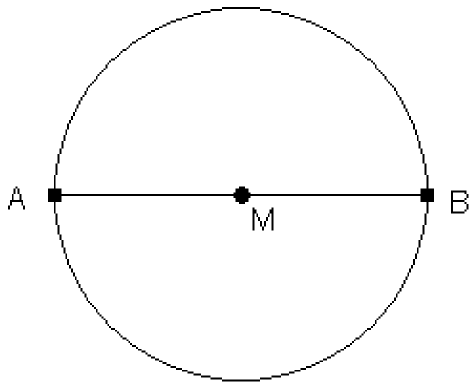


Abbildung 58: Eine Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M und Kreis K um M durch A

In dieser Konfiguration sind die Punkte A und B die freien Ausgangsobjekte. Der Mittelpunkt M hängt von A und B funktional ab, der Kreis K schließlich hängt von M und A ab. Nun wenden wir das Werkzeug *Punkt in freien Basispunkt verwandeln* auf den Mittelpunkt M an.

Damit wird M aus dem Abhängigkeitsgraph verschoben, M ist somit nicht mehr von A und B abhängig, aber der Kreis K ist weiterhin von M (und A) abhängig:

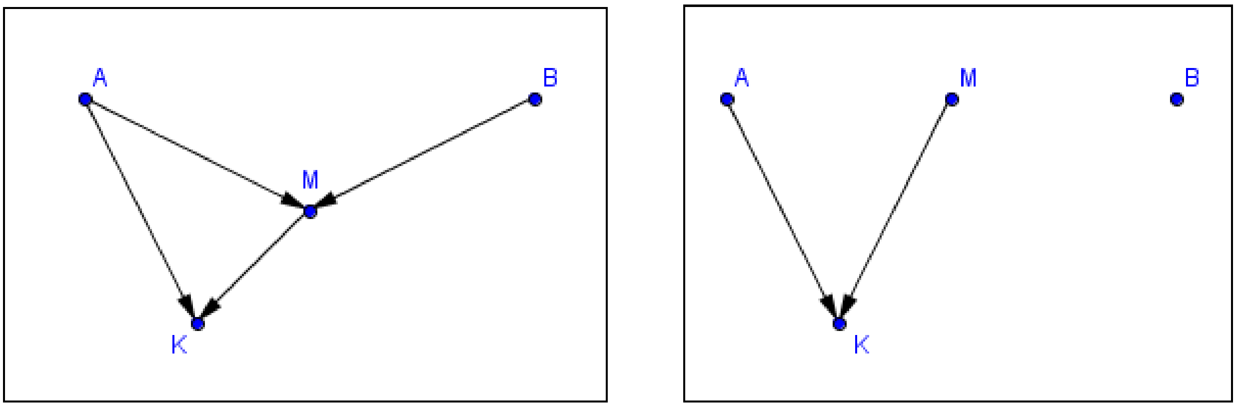


Abbildung 59: Der Abhängigkeitsgraph der Konfiguration vor (links) und nach (rechts) Anwendung des Werkzeugs *Punkt in freien Basispunkt verwandeln*

Nach der Anwendung des Werkzeugs *Punkt in freien Basispunkt verwandeln* auf den Punkt M kann M frei bewegt werden. Der Kreis K bewegt sich dabei dynamisch mit und verläuft weiterhin durch den Punkt A.

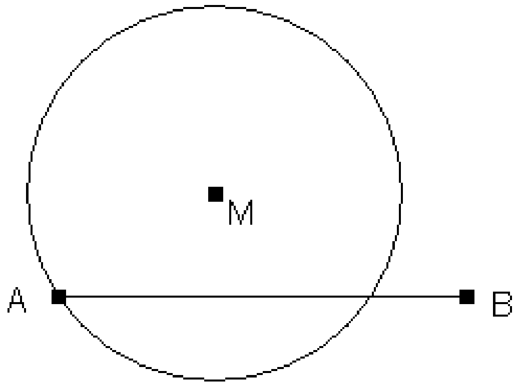


Abbildung 60: Auf *M* wurde das Werkzeug *Punkt in freien Basispunkt verwandeln* angewandt.

Wählt man anstatt eines konstruierten Punktes einen an eine Linie gebundenen Punkt, so wird die Bindung an diese Linie durch das Werkzeug erwartungsgemäß aufgehoben.

6. *Zwei Punkte zusammenführen*

Mit diesem Befehl können zwei Punkte einer Konfiguration in einen Punkt zusammengeführt werden. Hierbei ist die Reihenfolge der Übermittlung der Punkte wichtig: In der Hilfe-Datei [Mechling12] wird der erste Punkt Quellpunkt genannt, der zweite Punkt wird als Zielpunkt bezeichnet. Nachdem der Befehl auf den Quellpunkt und den Zielpunkt angewandt wurde, passiert folgendes:

> 1. *„Alle vom Quellpunkt direkt abhängigen Objekte werden vom Quellpunkt abgekoppelt und als vom Zielpunkt abhängig verbucht; anschaulich gesprochen: der Zielpunkt adoptiert alle Kinder des Quellpunktes.*
>
> 2. *Schließlich wird der Quellpunkt gelöscht.“* [ebenda]

Wegen dieser Unterscheidung in Quell- und Zielpunkt ist dieses Werkzeug nicht symmetrisch: Wählt man bei der Konfiguration Kreis K um Mittelpunkt M durch Punkt P den Mittelpunkt M als Quellpunkt und P als Zielpunkt, dann verschwindet K und M und es bleibt der Punkt P übrig. Wählt man hingegen P als Quellpunkt und M als Zielpunkt, so verschwindet K und es bleibt M übrig.

Zusammenspiel relationaler Werkzeuge in EUKLID DynaGeo

Beispiel 1: Strecke fester Länge kombiniert mit Punkt fixieren

Wir erstellen mit EUKLID eine *Strecke fester Länge*, zum Beispiel $5cm$ und wenden dann das Relationswerkzeug *Punkt fixieren* auf den Anfangspunkt A der Strecke an.

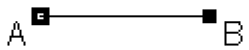


Abbildung 61: Konfiguration bestehend aus einer Strecke $\overline{AB}$ mit fester Länge und fixiertem Punkt A.

Nun kann die Lage von A nicht mehr verändert werden. Die Strecke $\overline{AB}$ besitzt die feste Länge $5cm$. Folglich kann in der Konfiguration nur noch $\overline{AB}$ verschoben werden oder die Position von B verändert werden: der Punkt B lässt sich auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A bewegen. Der zugehörige Radius ist gerade so groß wie die gewählte Streckenlänge.

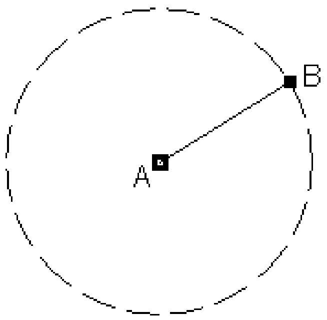


Abbildung 62: Der Punkt B lässt sich nur noch auf einem Kreis bewegen.

Nur mit Blick auf die Konfiguration und das Verhalten im Zugmodus ließe sich das DGS in diesem Beispiel nicht von einem sogenannten relationalen Geometriesystem (RGS) unterscheiden.

Beispiel 2: Punkt auf Linie kombiniert mit zwei Punkte zusammenführen

Wir konstruieren mit EUKLID zwei Geraden g und h und setzen mit dem Werkzeug *Punkt auf Linie* jeweils einen Punkt auf jede Gerade.

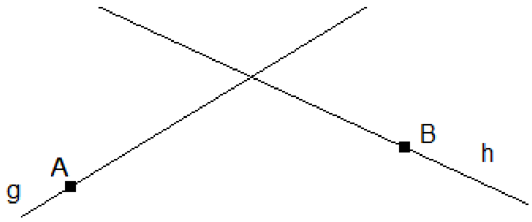


Abbildung 63: Auf die Gerade g (bzw. h) setzen wir den Punkt A bzw. B.

Nun wenden wir das Werkzeug *Punkte zusammenführen* auf die Punkte *A* und *B* bzw. in umgekehrter Reihenfolge an. Was würde wohl ein Benutzer erwarten, der das zum ersten Mal tut?

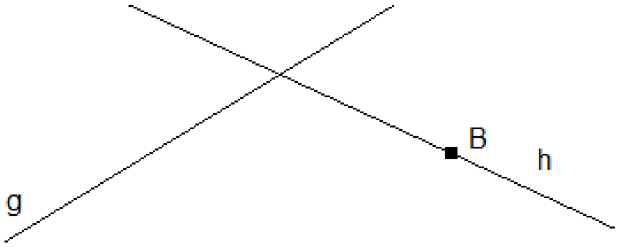


Abbildung 64: Nach Anwendung des Werkzeugs *zwei Punkte zusammenführen* mit *A* als Quellpunkt und *B* als Zielpunkt

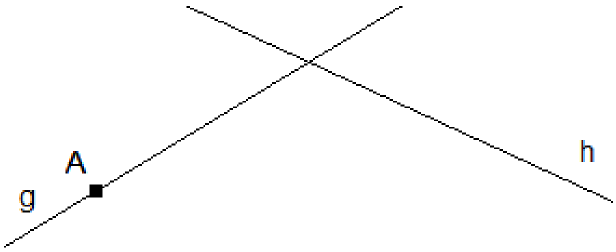


Abbildung 65: Nach Anwendung des Werkzeugs *zwei Punkte zusammenführen* mit *B* als Quellpunkt und *A* als Zielpunkt

Hier verschwindet also jeweils der Quellpunkt, der Zielpunkt bleibt auf seiner Position. Mit Blick auf den Namen des Werkzeugs könnten Benutzer auch das Szenario erwarten, dass die beiden Punkte hier auf einen zusammenfallen und mit dem (existierenden) Schnittpunkt übereinstimmen. Dabei blieben alle gesetzten Relationen (Punkt auf Linie) erhalten.

Beispiel 3: Mehrfache Anwendung des Werkzeugs Strecke fester Länge

Die Möglichkeit der Festlegung einer Streckenlänge besteht mit EUKLID auch dann, wenn die einzuschränkende Strecke die Seite eines Dreiecks ist. Im gleichen Dreieck funktioniert das allerdings nur mit höchstens zwei Seiten.

Bei dem Versuch, auch der dritten Strecke eine feste Länge zuzuordnen, kommt es zu einer Fehlermeldung:

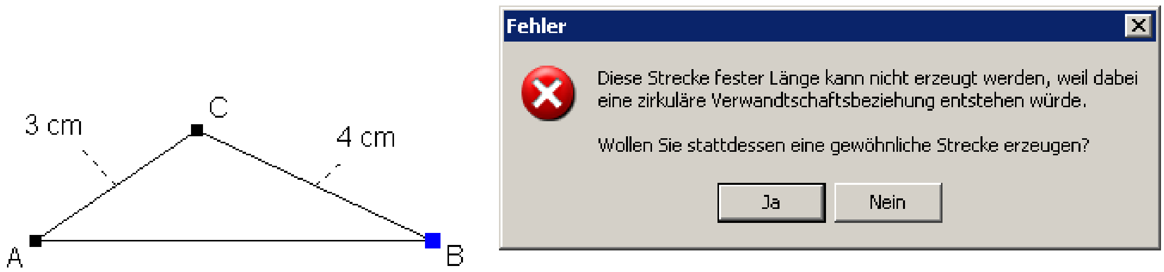


Abbildung 66: EUKLID gibt bei dreimaliger Anwendung des Werkzeugs *Strecke fester Länge* eine Fehlermeldung aus.

Dieses Phänomen untersuchen wir näher:

Bei einer Strecke $\overline{AB}$ mit *fester Länge* (z. B. $5cm$) hängt B von A ab, wenn wir an A ziehen. Ziehen wir an A, wird der Punkt B im Abstand von $5cm$ folgen. Mit der Notation eines gerichteten Graphen schreiben wir $A \rightarrow B$. Umgekehrt hängt B von A ab, wenn wir an A ziehen. Hier ist das funktionale Prinzip also in beiden Fällen gültig, aber nicht einheitlich. Wenn wir an A ziehen, hängt B von A ab und umgekehrt. Wir stellen das durch einen Doppelpfeil $A \leftrightarrow B$ dar, der sich abhängig, ob wir an A oder B ziehen, in den entsprechenden einfachen Pfeil ändert.

Angenommen, wir hätten nun eine Dreieckskonfiguration SSS durch dreimalige Anwendung des Werkzeugs *Strecke fester Länge* realisiert, dann ergeben sich die folgenden funktionalen Abhängigkeiten:

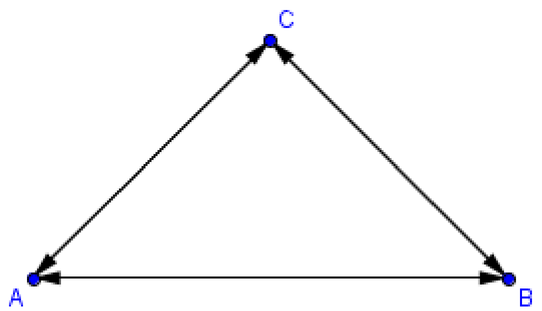


Abbildung 67: Funktionale Abhängigkeiten bei einer hypothetischen dreifachen Anwendung des Werkzeugs *Strecke fester Länge*

Ziehen wir nun am Punkt A, so ergeben sich speziell die funktionalen Abhängigkeiten:

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A.$$

Es käme also zu einem *Zirkelschlus*s, denn A würde von sich selbst abhängen. Folglich ist die Dreieckskonstruktion SSS durch eine dreimalige Anwendung des Relationswerkzeugs *Strecke fester Länge* in einem DGS nicht umsetzbar.

3.5 Der theoretische Rahmen der relationalen Geometriesoftware (RGS) und relationales Denken

Während in einem DGS gleich bei der Erzeugung eines Objektes seine Eigenschaften bestimmt sind, indem etwa ein Punkt als Schnittpunkt zweier Kreise definiert wird, sind bei einem RGS die Erzeugung von Objekten und die Festlegung von Eigenschaften getrennt. Die zugehörige Konfiguration wird in einem RGS bestimmt durch Einschränkungen (auch Relationen oder Constraints) zwischen den Objekten. In einem (idealen) RGS existieren zwar Objekte vergleichbar wie in einem DGS, allerdings hängen diese im theoretischen Modell nicht durch das funktionale Prinzip voneinander ab, sondern im Zugmodus gilt das:

Hauptprinzip der relationalen Geometriesoftware

Das System realisiert die Bedingungen, die man übermittelt, aber abgesehen davon kann der Benutzer die Konfiguration im Zugmodus frei verändern.

Im Vergleich zum Zugmodus eines DGS ist das ein auffälliger Unterschied: Dort kann ein Benutzer nur an den wenigen freien Punkten ziehen, in einem RGS hingegen kann er an **allen** Punkten der Konfiguration ziehen. Eine Ausnahme liegt etwa dann vor, wenn einem Punkt feste Koordinaten zugeordnet werden. Die folgenden Beispiele beziehen sich auf das Programm Geometry Expressions von Philip Todd. Dieses wird im Unterkapitel 3.8 näher vorgestellt.

Beispiel 1: Mittelpunkt einer Strecke

Um den Mittelpunkt einer Strecke $\overline{AB}$ zu erzeugen, geht ein Benutzer in folgenden Schritten vor:

1. Erzeugung der Punkte A, B und M,
2. Erzeugung der Strecke $\overline{AB}$,
3. Übermittlung der Bedingung: M liegt auf der Strecke $\overline{AB}$,
4. Übermittlung der Bedingung: $Abstand(M; A) = Abstand(M; B) = a$.

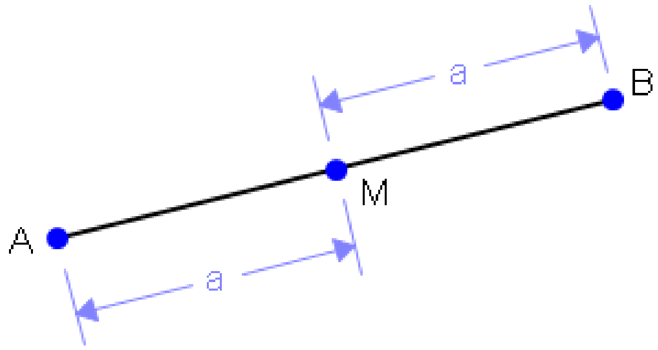


Abbildung 68: Der Mittelpunkt *M* einer Strecke $\overline{AB}$ wird durch eine Inzidenz- und zwei Abstandsbedingungen realisiert.

Konstruiert ein Benutzer mit einem DGS den Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$, so kann er dynamisch an A oder B ziehen, aber nicht an M, denn M hängt von A und B ab. In einem RGS hingegen kann an allen Punkten (und an der Strecke $\overline{AB}$) gezogen werden. Dabei bleiben alle übermittelten Bedingungen erfüllt, das heißt M ist immer der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Würde ein Benutzer nur an den Punkten A und B ziehen, könnte er allein dadurch nicht sicher entscheiden, ob er mit einem DGS oder einem RGS arbeitet.

Beispiel 2: Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen

Um in einem RGS ein Dreieck mit drei vorgegebenen Seitenlängen zu erzeugen, erstellt man die Objekte und gibt ihre Eigenschaften vor:

1. Erzeugung der Punkte A, B, C,
2. Erzeugung der Strecken $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$,
3. Übermittlung der Einschränkungen $a = 6cm$, $b = 5cm$, $c = 4cm$.

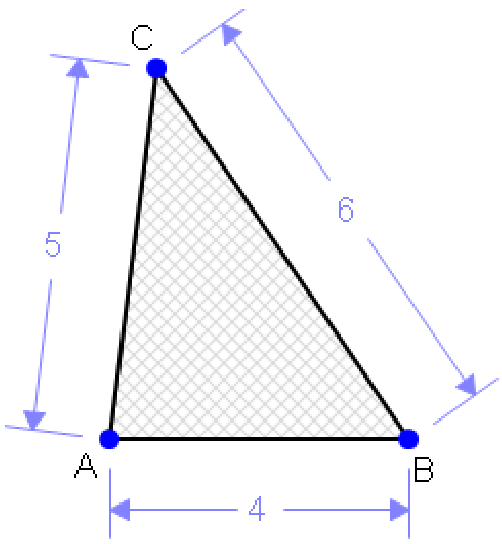


Abbildung 69: Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen

Danach lässt sich das Dreieck im Zugmodus nur noch als Ganzes bewegen. Hier ist also keine Konstruktion gemäß SSS erforderlich, sondern es reicht aus, zuerst die benötigten Objekte zu erzeugen und danach dem System die Bedingungen für die Streckenlängen zu übermitteln.

Nach dieser ersten Umschreibung formulieren wir den zentralen Begriff des Kapitels.

Definition: *ideales RGS*

Ein ideales RGS ist ein Geometrieprogramm, das folgende Eigenschaften erfüllt:

1. Geometrische Grundobjekte wie Punkt, Strecke, Gerade, Kreis können erzeugt und wieder gelöscht werden.
2. Geometrische Relationen können zwischen Objekten vorgeschrieben und wieder gelöscht werden. Solche Relationen sind beispielsweise Inzidenz, Kollinearität, Parallelität, Orthogonalität und Abstandsgleichheit.
3. Für den Zugmodus gilt das Hauptprinzip der RGS.

Im Sinne der Definition eines DGS von GRAUMANN et al. können wir folgende Eigenschaften ergänzen:

4. Eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen lässt sich zu einem neuen Befehl zusammenfassen (Makro).
5. Ein RGS kann die Bahnbewegung von Punkten visualisieren, die in Relation zu anderen Punkten stehen (Ortslinie).

Diese Definition ist grundlegend für die vorliegende Arbeit und verdient dementsprechend eine ausführliche Besprechung.

Beim in Kraft setzen einer Relation verändert sich im Allgemeinen die aktuelle Konfiguration und neu erzeugte Objekte besitzen zunächst keinerlei Beziehung zu anderen Objekten. Die Kombination aus erzeugten Objekten und den zwischen ihnen gesetzten Relationen ist das Analogon zur Konstruktion bei einem DGS, das heißt diese Daten bestimmen das Verhalten der Konfiguration im Zugmodus. Zur klaren Abgrenzung verwenden wir bei der Benutzung eines RGS den Begriff der Komposition, vgl. die Definition in Unterkapitel 1.1.

Die Gültigkeit des Hauptprinzips der RGS impliziert, dass in einem idealen RGS keine Unterscheidung zwischen freien und abhängigen Punkten existiert.

Die Definition eines idealen RGS verdeckt für die Umsetzung auf der Softwareebene problematische Details: Relationen können sich widersprechen, ein RGS muss das entdecken und zurückmelden. Des Weiteren legen Relationen im Allgemeinen die neuen Positionen von Objekten nicht eindeutig fest, das RGS muss also auswählen oder dem Benutzer die Wahl lassen. Die konkrete Wahl durch das RGS kann für den Benutzer willkürlich und nicht nachvollziehbar wirken.

In einem RGS müssen Objekte irgendwie erzeugt werden. Bei einem idealen RGS erfolgt das bei den Punkten durch „Zeichnen“ (Mausklick), aber bereits bei einer Strecke bzw. einer Geraden stößt man hier an eine philosophisch-theoretische Grenze und muss faktisch auf das Konstruieren zurückgreifen: Eine Strecke entsteht durch das Verbinden zweier Punkte. Das ist eine Grundkonstruktion.

Die Überschneidung hin zum Konstruieren setzt sich in den real existierenden RGS fort, zum Beispiel beim Mittelpunkt einer Strecke, da ein Benutzer nicht auf die gewohnten grundlegenden DGS-Werkzeuge verzichten möchte.

Abgrenzung zu DGS: prinzipielle Unterschiede

Bereits in der ersten Eigenschaft eines DGS, die durch GRAUMANN et al. gefordert wird, zeigt sich ein fundamentaler Unterschied zwischen beiden Systemen. Dort heißt es:

> „*[...] die eine euklidisch geprägte Schulgeometrie und deren traditionelle Werkzeuge auf dynamische Weise modellieren [...]*“.

Eine euklidisch geprägte Schulgeometrie impliziert die Unterscheidung zwischen freien und abhängigen Punkten, aber in einem idealen RGS existiert diese Unterscheidung nicht. Bei Konstruktionen ist die zeitlich-logische Struktur relevant, während Spezifikationen in einem RGS in beliebiger Reihenfolge gegeben werden können, da sie durch das logische UND miteinander verknüpft sind.

Grundkonstruktionen wie Mittelpunkt einer Strecke und Senkrechte auf einer Geraden durch einen Punkt können auch relational in Form von Bedingungen aufgefasst werden, allerdings können in einem DGS nicht jederzeit Bedingungen gesetzt bzw. gelöscht werden.

Wir haben in Unterkapitel 3.4 gesehen, dass in DGS wie EUKLID DynaGeo und GeoGebra vereinzelt relationale Werkzeuge vorkommen. Diese Tatsache macht ein DGS aber nicht schon zu einem RGS, denn diese relationalen Werkzeuge sind die Ausnahme, nicht die Regel. Außerdem liegt diesen vereinzelten relationalen Werkzeugen kein Gesamtkonzept zugrunde.

Trotz dieser Unterschiede zwischen DGS und RGS gibt es Konfigurationen, bei denen ein Benutzer nur mit Blick auf das Verhalten im Zugmodus nicht zwischen den beiden Systemen unterscheiden könnte. Wir greifen zur Veranschaulichung dieser Aussage nochmals die Konfiguration bestehend aus einer Strecke $\overline{AB}$ auf, bei der die Länge der Strecke vorgegeben wird und der Punkt A fixiert wird.

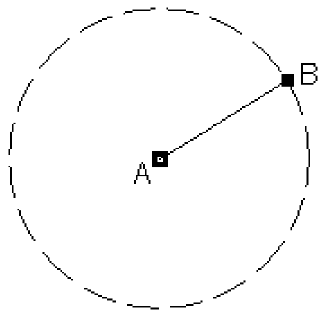


Abbildung 70: Konfiguration bestehend aus einer Strecke $\overline{AB}$ mit fester Länge und fixiertem Punkt A.

In dieser Konfiguration lässt sich nur noch der Punkt B verändern: Er kann auf dem Kreis um A bewegt werden. Dabei ist der zugehörige Radius gerade so groß wie die Länge der Strecke $\overline{AB}$. In einem RGS erhält man diese Konfiguration durch folgende Schritte:

- Erzeugung der Punkte A und B und der Strecke $\overline{AB}$,
- Formulierung der Bedingungen: $Abstand(A, B) = 5cm$ und $A(x, y) = (0,0)$

Dann zeigt die Konfiguration in einem RGS **das gleiche Verhalten** wie in einem DGS mit obigen Relationswerkzeugen. Nur mit Ansicht des Zugmodus, aber ohne Softwarekenntnis wäre hier also ein Betrachter nicht in der Lage, ein DGS mit einzelnen relationalen Werkzeugen von einem RGS zu unterscheiden.

Abgrenzung zu DGS: Unstetigkeit im Zugmodus

Geometry Expressions setzt eine durch Bedingungen definierte Konfiguration durch eine ermittelte Konstruktion um. Für solche RGS gilt also das gleiche Spannungsverhältnis zwischen Stetigkeit und Determinismus wie für DGS. Wir überprüfen diese Aussage an zwei Beispielen.

Beispiel 1: Parallelogramm springt zum Trapez

Wir setzen in Geometry Expressions mit dem folgendem Kompositionsprotokoll ein Parallelogramm um.

1. A,B sind freie Punkte.
2. Erstelle die Strecke $\overline{AB}$.
3. Erstelle eine Gerade g.
4. Setze den Punkt C auf g.
5. Setze Gerade g und Strecke $\overline{AB}$ parallel zueinander.
6. Erstelle Kreis k_1 um A durch C.
7. Erstelle Kreis k_2 um B durch D. Der Kreis soll g schneiden.
8. Setze Länge der Strecke $\overline{AC}$ auf a.
9. Erstelle Schnittpunkte E und F von k_2 mit g.
10. Setze Länge der Strecke $\overline{BE}$ auf a.

Dann erhält man ein Parallelogramm wie in Abbildung 71 dargestellt.

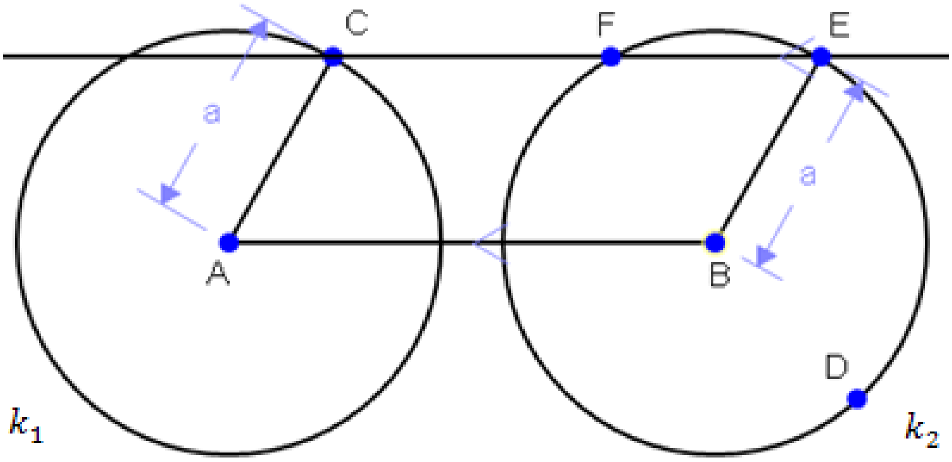


Abbildung 71: Parallelogramm umgesetzt mit Geometry Expressions

Verschiebt man nun den Punkt C nach links, so rücken die Punkte F und E zusammen und inzidieren im Grenzfall. Dann liegt ein Rechteck $ABEC$ vor. Verschiebt man dann den Punkt C weiter nach links, so entfernen sich F und E wieder voneinander, aber das Parallelogramm wird zum Trapez.

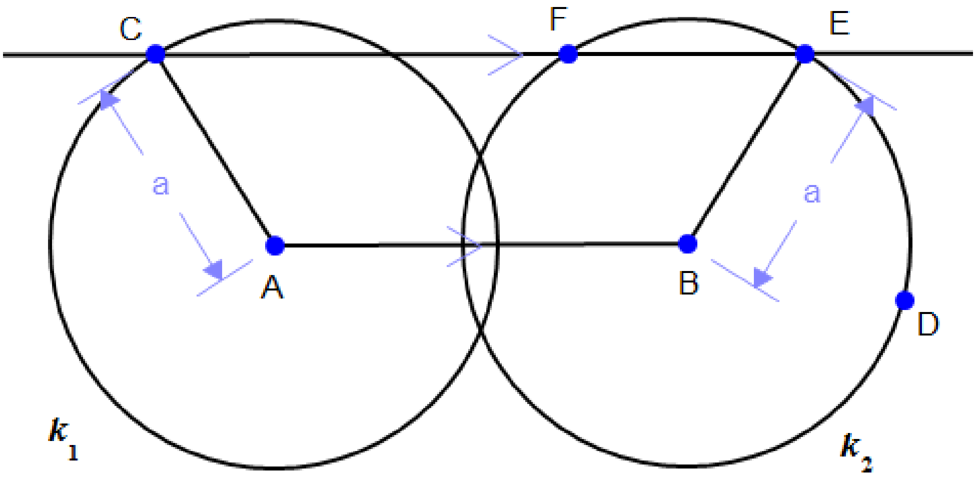


Abbildung 72: Das Parallelogramm $ABEC$ wurde zum Trapez.

Bewegt man anschließend den Punkt C zurück in seine Ausgangsposition, so wird das Trapez wieder zum Parallelogramm. Die Konfiguration ist reversibel, also ist hier Determinismus gegeben. Verschiebt man die freien Punkt ein wenig, so verschieben sich die abhängigen Objekte ebenfalls wenig, folglich ist auch Stetigkeit gegeben.

Hier liegt eine **Unstetigkeit auf der begrifflichen Ebene** vor: Das Parallelogramm „springt" zum Trapez. Die Konfiguration verhält sich beim Ziehen am Punkt C genauso wie die entsprechende Konfiguration in GeoGebra oder EUKLID DynaGeo.

Die Ursache des Phänomens lässt sich wiederum durch die Doppeldeutigkeit des Schnittes einer Geraden mit einem Kreis begründen: Die Software vertauscht die Rollen der beiden Punkte E und F nachdem beide inzidieren.

Wie verhält sich die Konfiguration, wenn wir am Punkt E ziehen?

Obwohl der Punkt E konstruiert wurde, lässt er sich in Geometry Expressions gemäß dem Hauptprinzip innerhalb der Grenzen seiner Einschränkungen bewegen, das heißt, er lässt sich auf dem Kreis k_2 und der Geraden g verschieben.

Wir bewegen ihn ausgehend von Abbildung 71 in Richtung des Punktes F bis er links von F liegt.

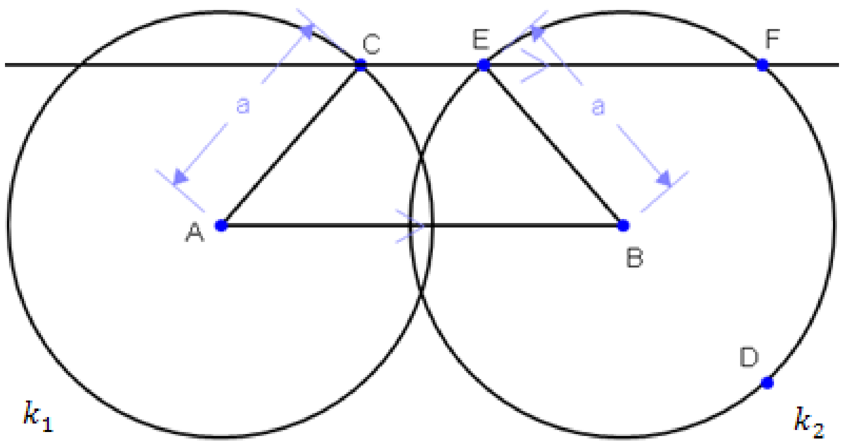


Abbildung 73: Wir ziehen am Punkt *E*.

Bewegen wir nun den Punkt E weiter im Gegenuhrzeigersinn auf dem Kreis k_2 so schlägt das Trapez über Kreuz um.

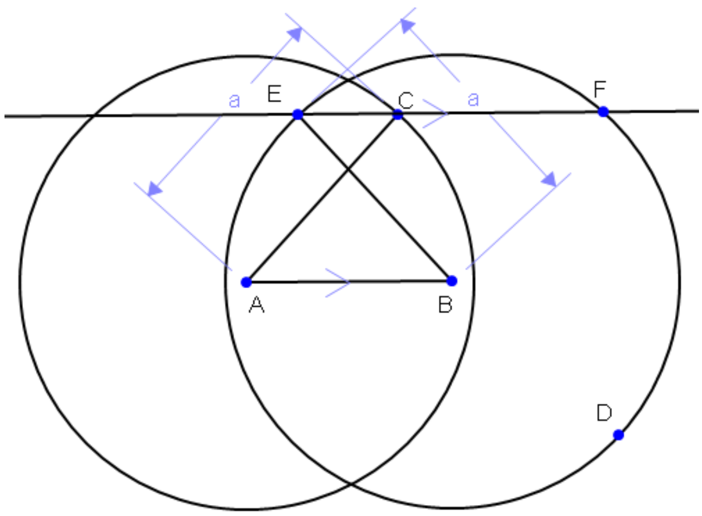


Abbildung 74: Das Trapez schlägt über Kreuz um.

Bewegt man den Punkt E nun zurück in seine Ausgangsposition, so wird das Trapez wieder zum Parallelogramm. Die Konfiguration ist reversibel, also liegt hier Determinismus vor. Verschiebt man die freien Punkte ein wenig, so verschieben sich die abhängigen Objekte ebenfalls wenig, folglich ist Stetigkeit gegeben.

Gleichwohl gibt es hier **zwei** Unstetigkeiten auf der begrifflichen Ebene: Erst springt das Parallelogramm zum Trapez über und dann wird aus dem Trapez ein überschlagendes Trapez.

Beispiel 2: Inkreis eines Dreiecks springt zum Ankreis

Wir setzen die Konfiguration eines Dreiecks und des zugehörigen Inkreises mit folgendem Kompositionsprotokoll um:

1. Erstelle das Dreieck A,B,C.
2. Erstelle den Kreis K um den Punkt D durch den Punkt E.
3. Setze die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$ tangential zum Kreis K.

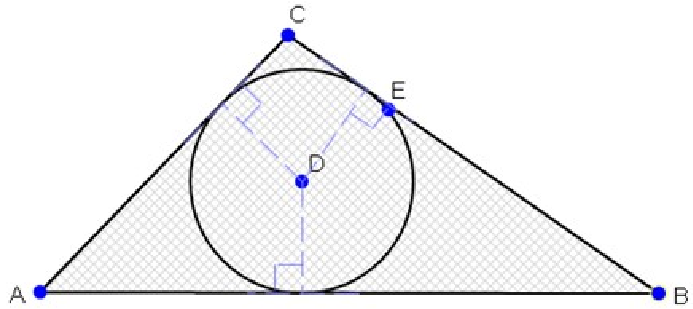


Abbildung 75: Der Inkreis des Dreiecks ABC wird mit Tangentialbedingungen umgesetzt.

Zieht man nun C in Richtung der Seite $\overline{AB}$ und darüber hinaus, so springt der Inkreis zum Ankreis um:

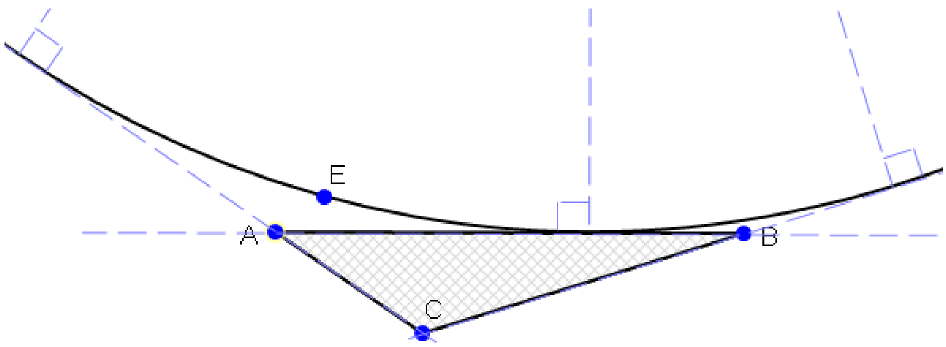


Abbildung 76: Der Inkreis ist zum Ankreis umgesprungen.

Denkt man sich die Dreiecksseiten zu Geraden verlängert, dann bleiben die Tangentialbedingungen sinngemäß erhalten. Das wird in Geometry Expressions mit den strichlierten Lotgeraden und den Symbolen für einen rechten Winkel angezeigt. Zieht man nun C zurück in Richtung der Strecke $\overline{AB}$, dann springt der Ankreis an der Strecke $\overline{AB}$ um.

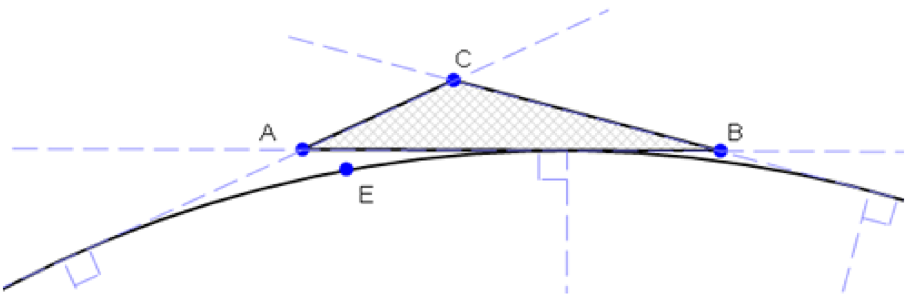


Abbildung 77: Der Ankreis ist an der Strecke $\overline{AB}$ umgesprungen.

Bei dieser Konfiguration liegt wiederum eine **Unstetigkeit auf der begrifflichen Ebene** vor: Der Inkreis springt zum Ankreis über. Außerdem lässt sich das im Zugmodus nicht umkehren.

In Abschnitt 4.3.9 auf S. 116 werden wir weiter sehen, dass eine äußere gemeinsame Tangente zweier Kreise zu einer inneren gemeinsamen Tangente werden kann, aber dieses Phänomen interpretiere ich nicht als Unstetigkeit, da es eine gemeinsame Tangente bleibt.

Abgrenzung zu DGS: Abhängigkeitsgraph eines DGS versus Relationsgraph eines RGS

Wir greifen nochmals das Beispiel der Konfiguration auf, die aus den Punkten A, B, M und dem Kreis K um M durch A besteht. M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. In Abbildung 59 hatten wir den Abhängigkeitsgraphen dargestellt:

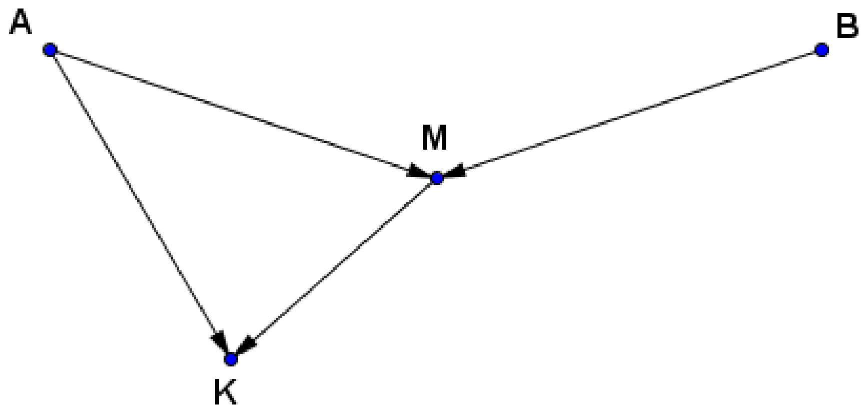


Abbildung 78: Abhängigkeitsgraph der Konfiguration

In einem **Relationsgraphen** hingegen werden die Relationen visuell abgebildet. Die folgende Art der Darstellung ist aus [BoFuHo95] entnommen und modifiziert:

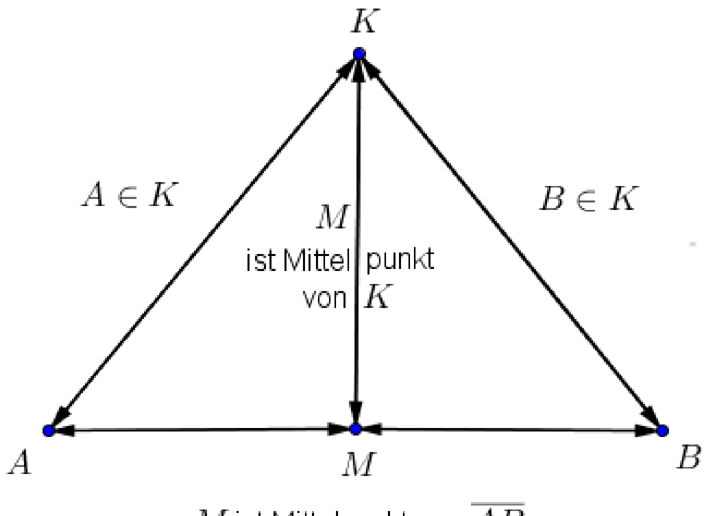


Abbildung 79: Relationsgraph der Konfiguration

Darin drücken die Doppelpfeile ↔ aus, dass eine Relation sich aus zwei Perspektiven betrachten bzw. in zwei Richtungen lesen lässt: Der Punkt A liegt auf dem Kreis K, das heißt, es gilt $A \in K$. Natürlich können wir auch formulieren, dass der Kreis K den Punkt A enthält: $K \ni A$.

Vergleich zwischen funktionalem und relationalem Denken (Fortsetzung)

Nachdem nun das Konzept eines RGS vorliegt, setzen wir den Vergleich zwischen funktionalem und relationalem Denken des Unterkapitels 1.2 fort.

Tabelle 7: Gegenüberstellung der zentralen Aspekte des funktionalen und relationalen Denkens (Fortsetzung von Tabelle 4)

	Funktionales Denken	**Relationales Denken**
Verknüpfung zwischen den beteiligten Größen	Zuordnungscharakter	Beziehungscharakter
Hauptaspekt der Verknüpfung	Änderungsverhalten	Invarianzverhalten und Gleichberechtigung
Kontext Geometrie (Konfiguration)	Konstruktion	Komposition
Zeitlicher Aspekt	Reihenfolge der Konstruktionsschritte ist relevant.	Reihenfolge der Kompositionsschritte ist zweitrangig.
Dynamik	Kann bewegt gedacht werden (J. ROTH).	Konzept der Freiheitsgrade

Zeitlicher Aspekt

Bei einer Konstruktion ist die Reihenfolge der Konstruktionsschritte relevant. Bei einer Komposition hingegen ist die Reihenfolge der Kompositionsschritte zweitrangig, denn die Relationen sind paarweise durch das logische UND miteinander verknüpft. Eine Konstruktion erfordert Planung. Konstruktionen als geometrische Planungsprozesse stehen modellhaft für komplexere, auch außermathematische Planungsprozesse. Bei einer Komposition hingegen stehen das relationale und begriffliche Erfassen der Situation im Vordergrund.

Diese Unterschiede veranschaulichen wir am Beispiel des Dreiecksumkreises.

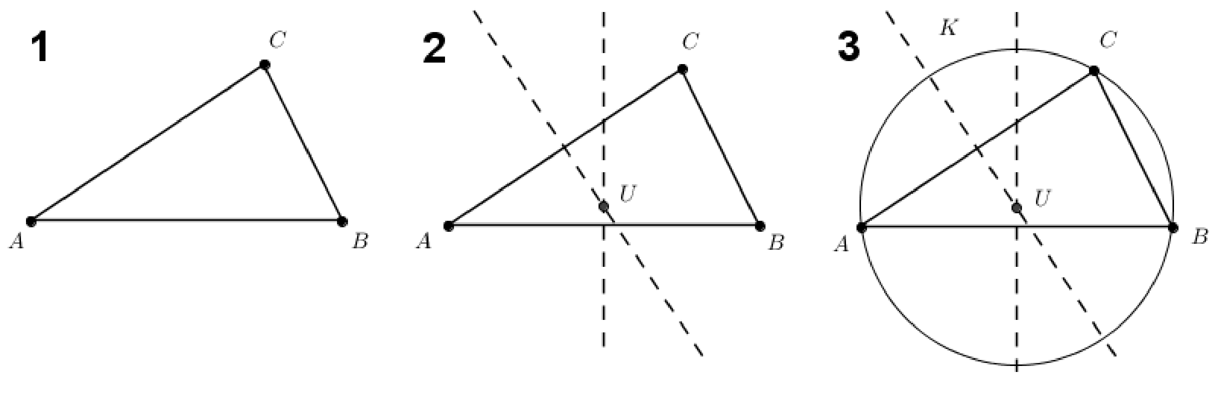


Abbildung 80: Konstruktion des Umkreises eines Dreiecks

Bei der Konstruktion des Umkreismittelpunktes muss benutzt werden, dass dieser sich als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ergibt. Bei der Komposition hingegen wird benutzt, dass der Umkreismittelpunkt von allen drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand besitzt:

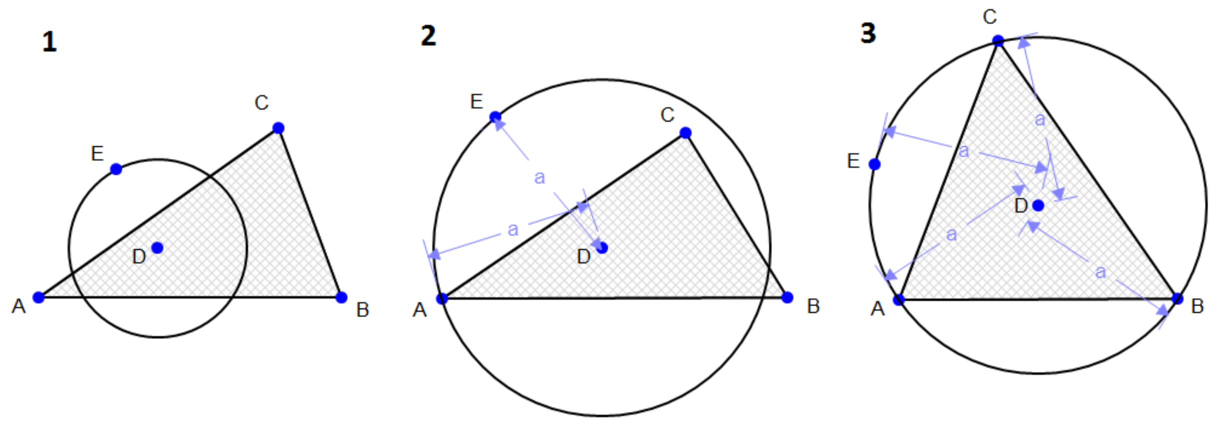


Abbildung 81: Komposition des Umkreises mit einem RGS

Dynamik

Eine Konstruktion kann nach ROTH bewegt gedacht werden. ROTH nennt in seiner Dissertation [Roth05, S. 14] die folgenden Kernfähigkeiten des bewegten Denkens:

- *„in eine Konfiguration Bewegung hineinsehen und damit argumentieren,*
- *die Gesamtkonfiguration erfassen und analysieren,*
- *das Änderungsverhalten erfassen und beschreiben."*

Der erste Aspekt lässt sich wörtlich auch beim relationalen Denken notieren, denn Konfiguration ist der Oberbegriff zu Konstruktion und Komposition. Allerdings haftet einer funktionalen Bewegung grundsätzlich eine Orientierung an: Wenn sich x ändert, dann ändert sich $y = f(x)$ davon abhängig. In einer Komposition hingegen können grundsätzlich alle Objekte verändert bzw. „in Gang gesetzt" werden und sich dadurch wechselseitig verändern, dabei bleiben die gesetzten Relationen in Kraft mit dem Freiheitsgrad als eine charakteristische Größe.

Der zweite Aspekt lässt sich sinngemäß ebenfalls beim relationalen Denken festhalten: Relational erfassen und analysieren bedeutet bei einer Komposition die vorhandenen geometrischen Objekte zu benennen und die zwischen ihnen gelten Relationen zu formulieren.

Der Aspekt des Änderungsverhaltens korrespondiert beim relationalen Denken mit dem Invarianzverhalten wie bei der Hyperbelgleichung $x \cdot y = 1$ bereits ausgeführt wurde. In einem dynamischen Geometriesystem sind Konfigurationen im Zugmodus variabel. Das bedeutet, im Zugmodus können sich auch die Relationen zwischen den geometrischen Objekten mit der Zeit verändern. Betrachten wir etwa zwei Geraden g und h. Auf der Software-Ebene haben wir es hier zu tun mit einer **Schar** von Geraden g_t und h_t: Zu jedem Zeitpunkt t existieren zwei virtuelle Realisierungen der Geraden g_t und h_t mit Relationen, die sich abhängig von der Zeit ändern können.

In einem RGS ist der Aspekt der Dynamik an das Konzept der Freiheitsgrade gekoppelt.

Diese Aussage spiegelt sich im Hauptprinzip der RGS wider: Das System realisiert die Bedingungen, die man übermittelt, aber abgesehen davon kann der Benutzer die Konfiguration frei verändern.

3.6 Perspektivenwechsel Geometrie – Algebra

Wir stellen in diesem Unterkapitel die Beziehung zur Algebra her. Dazu vergleichen wir auf der fachwissenschaftlichen Ebene Entsprechungen zwischen Geometrie und Algebra und auf der softwaretechnischen Ebene Entsprechungen zwischen RGS und CAS.

Nicht alle RGS arbeiten algebraisch, gleichwohl ist es aus didaktischer Sicht sinnvoll, wenn sich Lernende bei der Arbeit mit einem solchen System die folgenden Analogien klar machen, denn die Formulierung einer Konfiguration durch eine Menge von Gleichungen verdeutlicht, dass man ohne funktionale Abhängigkeit auskommen kann. Außerdem unterstützt die algebraische Sicht das Denken in Freiheitsgraden.

Tabelle 8: Entsprechungen zwischen Geometrie und Algebra

Geometrie	**Algebra**
Geometrisches Objekt, z. B. Punkt P	Koordinaten, z. B. $P(x\|y)$
Finden einer Konfiguration	Finden einer Lösung
Ziehen mit der Maus	„Wandern“ in der Lösungsmenge
Ortslinie aufzeichnen	Eindimensionale Lösungsmenge bestimmen
Zu viele Einschränkungen für ein Objekt	Gleichungssystem überbestimmt
Starres System	(Lokal) eindeutige Lösung
Konstruktionsvorschrift finden	Gleichungssystem umformen zu $\begin{aligned} x_2 &= f(x_1) \\ x_3 &= f(x_1, x_2) \\ &\vdots \\ x_{n+1} &= f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$

Hier liegt nun ein Vergleich mit der Algebra und den Computeralgebrasystemen (CAS) als Werkzeuge für diese Disziplin nahe: CAS reduzieren Termumformungen und das Lösen von Gleichungen aufs „Knöpfchen drücken“. DGS gehen nicht so weit: Zur Problemlösung muss, wie auch bei der computerfreien Arbeit, eine Konstruktion gefunden werden. Dagegen stellen RGS das geometrische Analogon zu CAS dar, weil typische Konstruktionsaufgaben durch das RGS als Black Box gelöst werden können:

Tabelle 9: Vergleich CAS mit RGS

	CAS in Abgrenzung zu Papier und Tabellenkalkulation	RGS in Abgrenzung zu Papier und DGS
Rolle für Lernende	• Entlastung von Arbeiten im Kalkül • Freiraum für Lerninhalte, die ohne CAS schwer zugänglich sind, zum Beispiel Modellierungsaufgaben	• Entlastung von komplexen Konstruktionen • Freiraum für Lerninhalte, die ohne RGS schwer zugänglich sind, z. B. komplexe Sätze und Konfigurationen
Umgang mit Objekten	Objekte können symbolisch behandelt werden.	Objekte können geometrische Unbestimmte sein.
Zur Benutzung nötige Fähigkeiten	• Terme und Gleichungen in Computernotation eingeben • Grundlegende Befehle zur Vereinfachung und zur Lösung anwenden	• Geometrische Objekte erzeugen • Grundlegende geometrische Relationen umsetzen, um zur gewünschten Konfiguration zu gelangen
Zur kompetenten Benutzung bedarf es weiter	• algebraic structure sense • Kenntnis der Lösbarkeit eines Gleichungssystems bzw. der Mächtigkeit einer Lösungsmenge	• Fähigkeit, das Zugverhalten und ggf. Ortslinien zu interpretieren • Kenntnis von nicht eindeutigen Konfigurationen, zum Beispiel SSW

Zur weiteren Lektüre mit Blick auf den Begriff *algebraic structure sense* gehe ich kurz auf [Dreyfus/Hoch09] ein Dort erwähnen die Autoren, dass der Begriff *structure sense* (im algebraischen Kontext) auf [Linchevski/Livneh99] zurückgeht. DREYFUS und HOCH greifen diesen Begriff auf und konkretisieren ihn in durch die folgende Definition:

„*Students are said to display structure sense for high school algebra if they can:*

- *Recognise a familiar structure in its simplest form.*
- *Deal with a compound term as a single entity, and through an appropriate substitution recognise a familiar structure in a more complex form.*
- *Choose appropriate manipulations to make best use of a structure.*" [Dreyfus/Hoch09, S. 1]

Als Beispiel dazu zitiere ich weiter den Ausschnitt der folgenden Tabelle. Die Probandin Katy wurde im Rahmen eines Interviews gebeten, vorgegebene algebraische Ausdrücke (linke Spalte) verbal zu beschreiben und neue Beispiele zu geben.

Tabelle 10: Verbalising and exemplifying (Ausschnitt)

Structure	Explanations	New examples
$a^2 + 2ab + b^2$	It's sum squared	1. $(3 + 2x)^2 + 6(3 + 2x) + 9$ 2. $(4x^2 + 12x + 9)^2 + 6(3 + 2x) + 9$
$a^2 - b^2$	Difference of squares	3. $z^2x^2 - 9^2$ 4. $x^2(3x + 2)^2 - 64$

Im dritten Punkt „*Choose appropriate manipulations to make best use of a structure*" der obigen Definition hängt es natürlich von der konkreten Fragestellung ab, was unter geeigneten Umformungen zu verstehen ist.

3.7 Das erste CAD: Sketchpad

Das System Sketchpad ist 1962 entstanden im Rahmen der Doktorarbeit von I. SUTHERLAND in den Lincoln Laboratories am Massachusetts Institute of Technology (MIT). Es wird bislang als eines der einflussreichsten Programme angesehen, das jemals von einer einzelnen Person angefertigt wurde. Sketchpad wurde mittels eines sogenannten Lichtgriffels benutzt. Dieser wurde ebenfalls am MIT entwickelt und kann als Vorgänger der Maus aufgefasst werden.

Abbildung 82: Verwendung eines Lichtgriffels (engl. *light pen*) an einem Computerbildschirm[8]

Computer aided design (computerunterstütztes Konstruieren) gibt lediglich eine vage Umschreibung eines CAD, ein DGS nach GRAUMANN et al. würde in der Industrie sicherlich nicht als CAD akzeptiert werden.

[8] Die Aufnahme (ca. Oktokter 1969, Brown University, Rhode Island, USA) wurde als Objekt der Public Domain entnommen auf https://de.wikipedia.org/wiki/Lichtgriffel, zuletzt abgerufen am 18. April 2016.

Üblicherweise kann man mit einem aktuellen CAD sowohl eine Konfiguration komfortabel umsetzen als auch Maschinen zur Fertigung des Gegenstandes damit füttern. Außerdem bietet ein CAD diverse 3D-Ansichten und man kann die Konstruktionszeichnungen in allen möglichen Variationen zur Dokumentation drucken, speichern und weiterverarbeiten. Ein RGS hingegen stellt den Kern eines CAD dar: Mit dem RGS wird eine Konfiguration komfortabel umgesetzt.

Zur Beschreibung von Sketchpad transkribiere ich die folgenden Passagen aus einer Fernsehsendung von 1964. Dieses Interview ist auf YouTube in zwei Teilen verfügbar, die jeweils zehneinhalb Minuten dauern.[9] In dem Bericht werden Forscher der Lincoln Laboratories zu Sketchpad interviewt.[10] Das Einstiegsbild der Sendung beginnt mit einer Kurzbeschreibung von Sketchpad:

Abbildung 83: Kurzbeschreibung von Sketchpad

Der Interviewer stellt sich zu Beginn als „John Fitch, MIT science reporter“ vor und befragt zuerst Professor Steven Kuhns.

Abbildung 84: Prof. Steven Kuhns vom MIT (rechts)

Prof. Kuhns: „*John, we're going to show you a man actually talking to a computer, in way far different than it's ever been possible to do before.*“

[9] Den ersten Teil finden Sie auf www.youtube.com/watch?v=USyoT_Ha_bA, den zweiten Teil finden Sie auf www.youtube.com/watch?v=BKM3CmRqK2o. Beide Videos wurden zuletzt am 18. April 2016 abgerufen.

[10] Im Abspann des zweiten Teils heißt es „*recorded by WGBH-TV Boston, The Lowell Institute Cooperative Broadcasting council*.“

Interviewer: *„Surely not with his voice.”*

Prof. Kuhns: *„No, he is going to be talking graphically, he is going to be drawing and the computer is going to understand these drawings.“*

Er setzt fort mit:

Prof. Kuhns: *„And the man will be using a language, a graphical language, that we call Sketchpad that started with Ivan Sutherland some years ago when he was busy working on his doctoral degree. And you will see a designer effectively, solving a problem step by step. And he will not at the outset know precisely what his problem is, nor will he know exactly how to solve it but little by little he will begin to investigate ideas and the computer and he will be in cooperation – in the fullest cooperation – in this work.“*

Interviewer: *„But how is this different from the way the computer has been used in the past to solve problems?“*

Prof. Kuhns: *„In the conventional way – the old way – solving problems with the computer has been to understand the problem very very well indeed and moreover to know at the very outset just exactly what steps are necessary to solve the problem […]. But now we're making the computer be more like a – almost like – a human assistant and the computer will seem to have some intelligence – it doesn't really only the intelligence that we put in it – but it seems to have some intelligence. […] if you for example in the old days made so much as one mistake of a comma in the wrong place or a decimal point that was omitted, the entire program would hang up and wouldn't run but nowadays if you make a mistake you can correct it, as you will see, immediately and the computer is much more dowered and much more flexible.“*

Anschließend stellt der Interviewer Herrn *„Timothy Johnson, design division of the department of mechanical engineering”* vor. Herr Johnson sitzt in der folgenden Passage vor einem für heutige Verhältnisse großen Computer, auf dem Skechtpad läuft.

Abbildung 85: Mr. Johnson sitzt an dem Computer, auf dem Sketchpad läuft.

T. Johnson: *„In order to get the information into the computer we have to draw somehow […] and we use the light pen. […] Sutherland's program can draw straight lines and circles.”*

Anschließend erzeugt Herr Johnson geometrische Objekte wie Strecken und demonstriert den Zugmodus von Sketchpad.

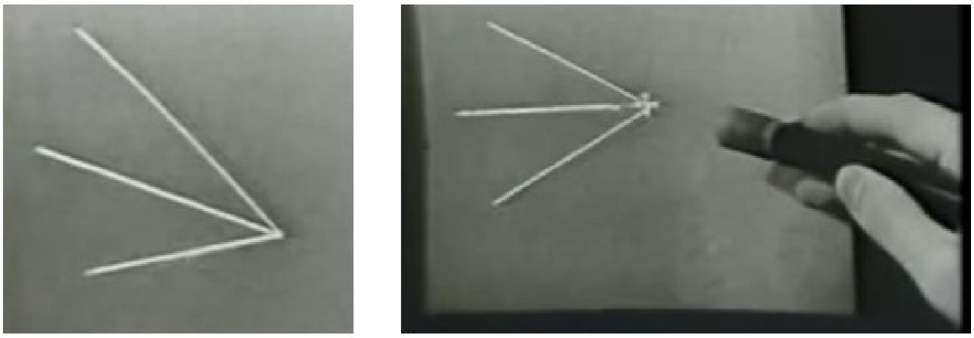


Abbildung 86: Die Konfiguration wird im Zugmodus mittels Light Pen verändert.

T. Johnson: *„Now, in an ordinary pencil paper-drawing all we have is this particular picture but the computer understands the geometry of this drawing here. […] And tell the computer to move that point by another push button-command."*

Herr Johnson erzeugt im weiteren Verlauf eine neue Konfiguration und führt vor, wie er eine Bedingung (engl. *constraint*) übermittelt.

T. Johnson: *„Now I can tell the computer to satisfy this constraint command. […] You see now that indeed the circle is ending at that line. […]"*

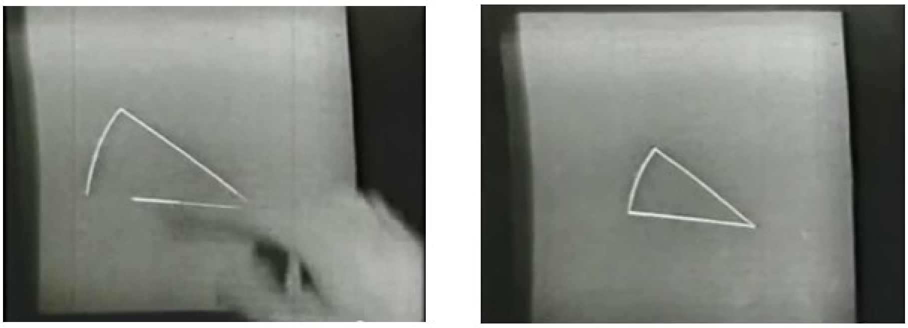


Abbildung 87: Eine Konfiguration (links) wird erzeugt. Daran wird eine Bedingung übermittelt (rechts).

Der Interviewer bittet Herrn Johnson, das Konzept der Constraints näher zu erklären. Herr Johnson gibt daraufhin das Beispiel eines Vierecks, das zu einem Rechteck wird.

T. Johnson: „*And I want this to be horizontal and vertical - a box. I can apply a new constraint, a horizontal constraint here, a vertical constraint here, and a horizontal here […]*."

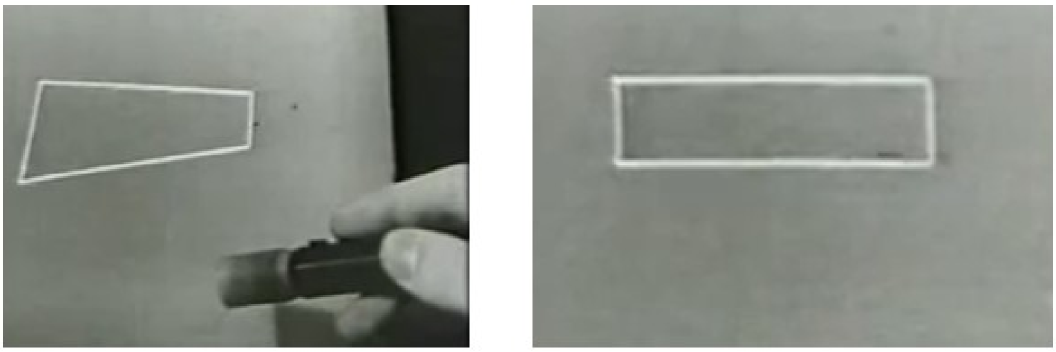


Abbildung 88: An das Viereck werden Constraints übermittelt, so dass ein Rechteck entsteht.

Im zweiten Teil des Berichts kann sich der interessierte Leser die Möglichkeiten in 3D von Sketchpad ansehen.

3.8 Aktuelle RGS und softwaretechnische Umsetzung

In diesem Unterkapitel werden als Vertreter aktueller RGS die Programme Geometry Expressions und FeliX vorgestellt.[11] Wir beginnen mit Geometry Expressions. Dieses Programm wurde in der Version 2.2 von den Probanden benutzt.

Geometry Expressions

Die erste Version von Geometry Expression, die für die Allgemeinheit bzw. für Schulen verfügbar war, kam 2006 auf den Markt.[12] Die Bedienung von Geometry Expressions folgt größtenteils dem Idealbild eines RGS: Der Benutzer wählt die beteiligten Objekte aus und übermittelt dann die gewünschte Einschränkung wie zum Beispiel Orthogonalität, Parallelität und weitere.

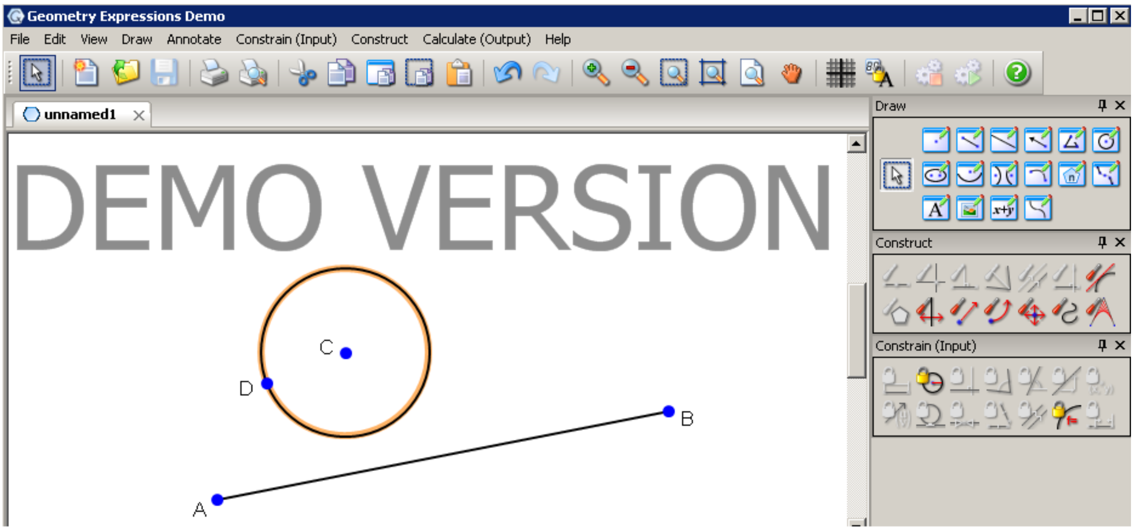


Abbildung 89: Programmfenster der Demoversion 2.2 von Geometry Expressions (Ausschnitt)

Mittels impliziter Gleichungen können auch algebraische Einschränkungen definiert werden. Außerdem kann sich der Anwender zugehörige parametrische oder implizite Gleichungen von Kurven ausgeben lassen. Mit Geometry Expressions können geometrische Größen berechnet werden, sowohl symbolisch als auch numerisch. Solche Größen sind zum Beispiel: Abstand, Länge, Radius, Winkel, Koordinaten, Flächeninhalt und Umfang. Ergebnisse können in passendem Format an Derive, Maple, MuPAD, Mathematica und WolframAlpha übergeben werden. Es gibt vier Hauptwerkzeugpaletten: Draw, Construct, Constrain und Calculate.

Abweichungen gegenüber einem idealen RGS ergeben sich, weil es nicht immer möglich ist, mehr als eine Einschränkung für ein Objekt zu realisieren wie das folgende Beispiel zeigt: Erzeugt wird ein Punkt A, dessen Koordinaten auf $(0|0)$ festgesetzt werden. Die Länge der Verbindungsstrecke zu einem weiteren Punkt B wird auf 3 gesetzt. Dann lässt sich der Punkt B erwartungsgemäß auf einer Kreisbahn um A drehen. Wenn man nun die x-Koordinate von B

[11] Bitte beachten Sie außerdem im Anhang den Einführungskurs RGS, den die Probanden erhalten haben.
[12] Persönliche Mitteilung von Philip Todd, dem Entwickler von Geometry Expressions, am 19. Januar 2014.

auf 3 festlegen will, was algebraisch möglich wäre, dann akzeptiert Geometry Expressions das nicht:

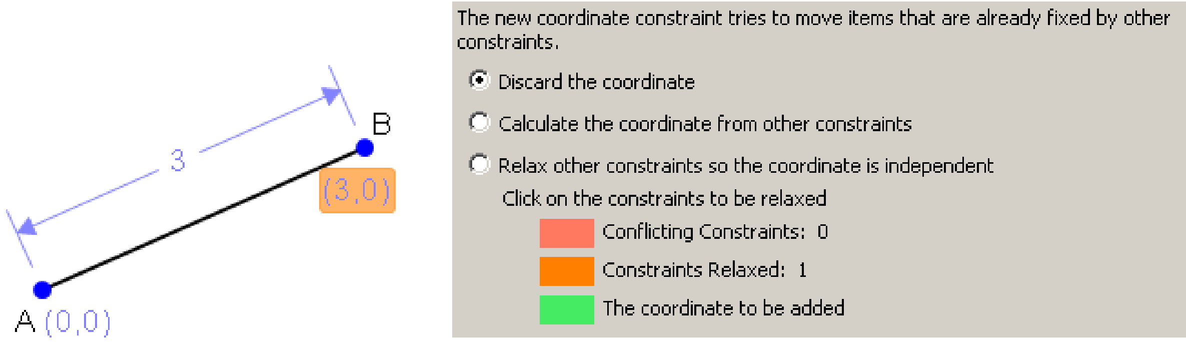


Abbildung 90: Geometry Expressions akzeptiert zwei algebraisch mögliche Constraints nicht.

Verschärft wird dieser Sachverhalt dadurch, dass Constraints im Sinne von Geometry Expressions bereits durch eine symbolische Benennung definiert werden. Das kann zu zwei Szenarien führen:

1. Wie gerade eben wird eine Fehlermeldung ausgegeben, obwohl alle Relationen logisch vereinbar sind.

2. Das Verhalten der Konfiguration kann sich im Zugmodus ändern.

Beispiel: Änderung des Verhaltens im Zugmodus

Wir betrachten zwei Punkte A und B und den mittels *Construct* erzeugten Mittelpunkt M. Wird am Punkt M gezogen, so kann sich gemäß dem Hauptprinzip der RGS die Konfiguration nur so ändern, dass M weiterhin der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ bleibt. Dafür gibt es theoretisch drei Möglichkeiten: Nur die Position von A ändert sich, nur die Position von B ändert sich oder beide Punkte verändern ihre Position.

Bei Geometry Expressions liegt der zweite Fall vor, unabhängig davon, ob M zu A hin oder weggezogen wird. Wird jedoch am Punkt B gezogen, so ändert sich die Lage von M, der Punkt A bewegt sich nicht mit. Allerdings ändert sich dieses letzte Verhalten im Zugmodus, wenn dem Punkt M allgemeine Koordinaten zugeordnet werden:

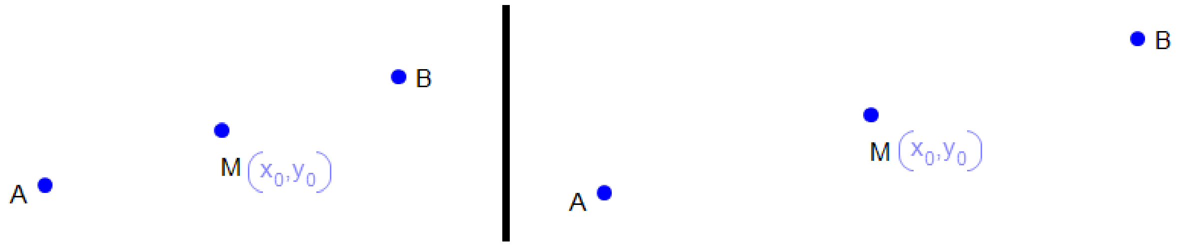


Abbildung 91: Besitzt M allgemeine Koordinaten (links), so bewirkt ein Zug an A bzw. B eine symmetrische Verlängerung der Strecke $\overline{AB}$ (rechts).

Geometry Expressions interpretiert allgemeine Koordinaten tendenziell als Constraint: Das System reagiert auf einen Zug an A bzw. B mit einer symmetrischen Verlängerung bzw. Verkürzung der Strecke $\overline{AB}$.

Die Komposition eines Dreiecks mit vorgegebenen Seitenlängen SSS funktioniert intuitiv, ebenso die Parabel als Ortskurve und der Gelenkmechanismus.

Bei der Komposition des Dreiecksinkreises durch Tangentialbedingungen haben wir bereits im Unterkapitel 3.5 gesehen, dass der Inkreis zum Ankreis wird, wenn man das Dreieck umschlägt. Das lässt sich im Zugmodus nicht mehr umkehren. Es ist außerdem mit Geometry Expressions nicht möglich, die Inzidenz zweier Punkte zu fordern. Daraus folgt, dass ein Benutzer ein Viereck nicht zum Dreieck machen kann.

FeliX 1.0

FeliX von R. OLDENBURG ist ein algebraisches RGS, vgl. [Oldenburg06 und Oldenburg08]. Das Zugverhalten der Komposition wird durch ein System von Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Koordinatenvariablen beschrieben.

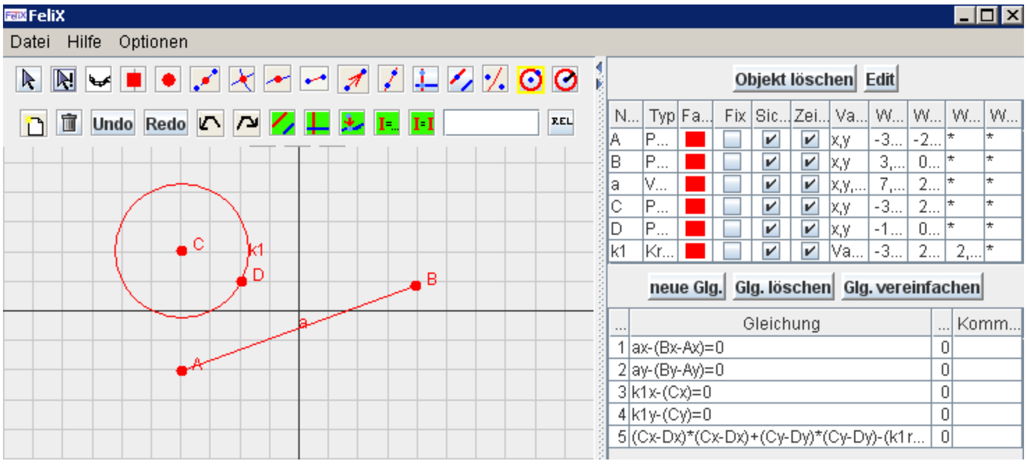


Abbildung 92: Programmfenster von FeliX (Ausschnitt)

Ein Benutzer kann beliebige Gleichungen eingeben. Für die üblichen Relationen wie Orthogonalität von Geraden oder Inzidenz gibt es Buttons, die das Eintragen der Gleichungen übernehmen. Die so entstehenden Gleichungen sind sichtbar und können von Hand weiter modifiziert werden. FeliX kann weiter die impliziten Gleichungen von Ortskurven berechnen. In FeliX dürfen sich Constraints sogar widersprechen. Beispielsweise kann man für einen Punkt *A(x,y)* die Koordinaten-Relationen $x = 0$, $y = 0$ und $x = 2$ fordern. Er wird dann bei (1|0) gezeichnet und es wird vermerkt, dass die erste und dritte Relation verletzt sind:

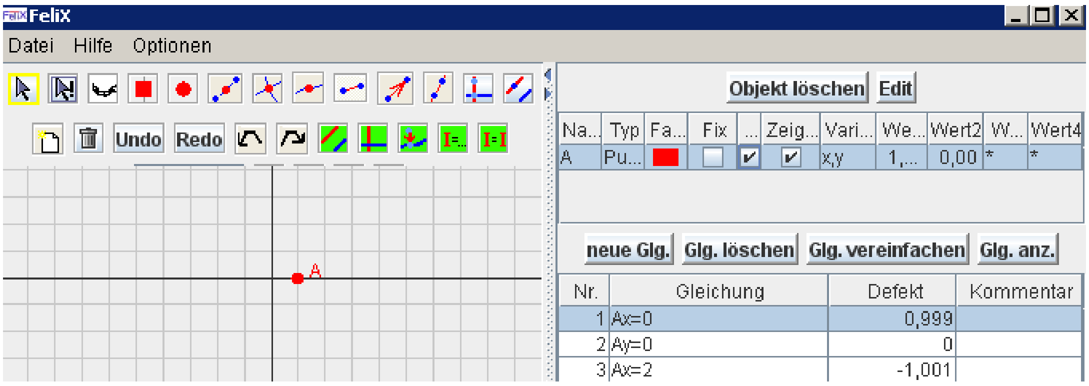


Abbildung 93: Sich widersprechende Constraints in FeliX (Ausschnitt)

Softwaretechnische Umsetzung eines RGS

Wenn sich ein RGS auf die Eigenschaften der Definition beschränkt, hat das zur Folge, dass die intellektuelle Leistung, die für die Entwicklung aufgebracht werden muss, in der Behandlung der Relationen liegt.

Für den Zugmodus setzt Geometry Expressions die Bedingungen in eine selbst ermittelte Konstruktion um, in der das zu ziehende Objekt ein Basisobjekt sein muss und berechnet dann die Konstruktion wie in einem DGS.[13] Deshalb lassen sich im Wesentlichen nur solche Konstruktionen durchführen, die sich auch mit einem DGS durchführen lassen. Es ist daher beispielsweise nicht möglich, die Winkeldreiteilung nach Archimedes umzusetzen.

Eine andere Strategie verwendet die Übersetzung der Relationen in ein Gleichungssystem und dessen Lösung. Das ist bei FeliX der Fall. Ein Geometrieprogramm, in dem beliebige Relationen durch Gleichungen und Ungleichungen vom Benutzer gesetzt werden können, wird in [Oldenburg05, S. 249 ff.] beschrieben und als algebraisch dynamisches Geometriesystem (ADGS) bezeichnet. Die in der Definition eines RGS genannten Relationen können algebraisch formuliert werden, daraus folgt: Jedes ADGS ist ein RGS.

Zur vertiefenden Lektüre finden Sie in [Hoffmann/Joan-Arinyo05] eine gute Einführung in Constraint solving im Kontext der Geometrie.

[13] Persönliche Mitteilung von Philip Todd am 19. Januar 2014

3.9 Gegenüberstellung DGS – RGS

In diesem Unterkapitel stellen wir DGS und RGS zusammenfassend und vergleichend gegenüber. Tabelle 11 korrespondiert mit Tabelle 7, in der die zentralen Aspekte des funktionalen und relationalen Denkens aufgelistet werden.

Tabelle 11: Gegenüberstellung DGS – RGS

	DGS	**RGS**
Zugmodus	Eingeschränkt durch die Trennung zwischen freien und abhängigen Punkten	Nicht eingeschränkt durch diese Trennung
Zu Grunde liegendes mathematisches Konzept	Funktionales Prinzip basierend auf der Trennung zwischen freien und abhängigen Punkten	Hauptprinzip der RGS basierend auf Relationen bzw. Einschränkungen
Zeitliche Reihenfolge der Arbeitsschritte	Relevant	Nicht relevant
Ändern der Konfiguration	Mit Aufwand verbunden	Standard
Makros	Ja	Denkbar
Ortslinie	Ja	Ja
Konzeptuelle Überschneidungen der Software-Vertreter	EUKLID bietet einzelne relationale Werkzeuge.	GE verfügt über einzelne Konstruktionswerkzeuge.
Springende Konfigurationen	Ja	Ja

Zugmodus

In einem DGS ist der Zugmodus eingeschränkt durch die Unterscheidung zwischen freien und abhängigen Punkten: Es kann nur direkt die Position der freien Punkte verändert werden und dadurch indirekt die Lage der abhängigen Punkte. In einem RGS hingegen gibt es diese Unterscheidung nicht: im Zugmodus kann jedes Objekt verschoben werden. Aus der Sicht eines Benutzers ist der Zugmodus in einem DGS im Vergleich zu einem RGS komplexer, denn es gibt deutlich mehr Möglichkeiten auszuwählen, an welchen Objekten gezogen wird.

Zu Grunde liegendes mathematisches Konzept

Einem DGS liegt das funktionale Prinzip zugrunde: Neue Objekte, die aus bereits existierenden entstehen, hängen von diesen funktional ab. Diese funktionalen Abhängigkeiten bleiben im Zugmodus erhalten. Abhängige Objekte lassen sich nicht direkt verändern. Das funktionale Prinzip gilt für jeden Schritt einer Konstruktion.

In einem RGS hängen Objekte nicht funktional einseitig voneinander ab, sondern sie hängen relational zusammen. Es gilt das Hauptprinzip der relationalen Geometriesoftware: Das RGS realisiert die Bedingungen, die man übermittelt, aber abgesehen davon kann der Benutzer die Konfiguration frei verändern.

Zeitliche Reihenfolge der Arbeitsschritte

In einem DGS ist die Reihenfolge der Arbeitsschritte wegen des funktionalen Prinzips relevant. In einem RGS hingegen gibt es keine ausgezeichnete Reihenfolge der Arbeitsschritte, da die Relationen paarweise durch das logische UND miteinander verknüpft sind. Es ist lediglich die zeitliche Trennung zwischen der Erzeugung der beteiligten Objekte und dem Setzen der Relationen zu beachten.

Ändern der Konfiguration

Bemerkt ein Benutzer im Laufe einer Konstruktion mit einem DGS einen Fehler, so muss er an die Stelle im Konstruktionsprotokoll zurückgehen, wo der Fehler auftaucht. Eine Änderung bedeutet bei DGS, dass ein falsch gesetzter Schnittpunkt gelöscht werden muss und durch den richtigen ersetzt werden muss. Durch das Löschen des falschen Schnittpunktes werden alle Objekte, die davon abhängen, ebenfalls gelöscht. Die Konstruktion wird also ab dem Fehler unbrauchbar und muss ab dem ersten falschen Konstruktionsschritt nochmals erstellt werden.

Bildhaft gesprochen errichtet man mit einer Konstruktion Stockwerk um Stockwerk eines Turms: Ist eine Etage fehlerhaft, so sind alle Etagen darüber ebenfalls unbrauchbar. Bei einem RGS hingegen ist das Abändern der Konfiguration nicht die ungewollte Ausnahme, sondern die Regel: Bedingungen können jederzeit gesetzt und gelöscht werden.

Makros

Makros sind ein fester Bestandteil der DGS und stehen für mentale Großschritte. Bislang bietet zwar kein RGS die Möglichkeit zur Makrodefinition (Stand März 2016), aber es sind in einem RGS Relationsmakros denkbar: Die Anwendung eines Relationsmakros verändert die Konfiguration derart, dass die gewünschten Relationen erfüllt werden. Beispielsweise würde ein Makro *Dreiecksumkreis* als Eingabe ein Dreieck und einen Kreis erwarten und bei Anwendung dann diejenigen Relationen setzen, die zusammen implizieren, dass der Kreis zum Inkreis des Dreiecks wird. Diese Überlegungen werden im Unterkapitel 6.2 auf S. 201 ff. ausgeführt.

Ortslinie

Ortslinien sind wie Makros ebenfalls fester Bestandteil der DGS. Mit einer Ortslinie kann nach GRAUMANN et al. die Bahnbewegung eines abhängigen Punktes visualisiert werden. Etwas plakativ formuliert wird hier ein abhängiger Punkt ausgewählt und mit einem imaginären Farbstift verknüpft. Bewegt man nun einen freien Punkt, so hinterlässt der ausgewählte abhängige Punkt eine Farbspur, die sogenannte Ortslinie. Auch in RGS wie Geometry Expressions sind Ortslinien verfügbar. Mögliche Anwendungen hierzu finden Sie im Unterkapitel 6.2 auf Seite 206 mit den Beispielen der Scherung und der Hyperbel als Ortskurve.

Konzeptuelle Überschneidungen der Software-Vertreter

In EUKLID DynaGeo gibt es zwar einzelne relationale Werkzeuge wie *Strecke fester Länge, Punkt auf Linie*, *Punkt fixieren* und *Punkt in freien Basispunkt verwandeln*, aber dadurch wird dieses DGS nicht zu einem RGS, denn das Hauptprinzip der RGS ist nicht erfüllt, mit anderen Worten: Im Zugmodus gilt das funktionale Prinzip, an abhängigen Punkten kann nicht gezogen werden.

Analog existieren in Geometry Expressions zwar einzelne Konstruktionswerkzeuge wie *Mittelpunkt einer Strecke*, *Schnittpunkt*, *Mittelsenkrechte* und weitere, aber dadurch wird dieses RGS nicht zu einem DGS, denn das funktionale Prinzip ist nicht durchgehend erfüllt: Es gibt keine Trennung zwischen freien und abhängigen Punkten. Positiv formuliert: Für den Zugmodus gilt das Hauptprinzip der RGS.

Springende Konfigurationen

Wir haben gesehen, welche Arten von Unstetigkeit in den beiden Systemen auftreten: In einem DGS gibt es aus prinzipiellen Gründen Konfigurationen mit springenden Punkten und Parallelogramme können zu Trapezen werden, in einem RGS wie Geometry Expressions kann ein Inkreis zum Ankreis springen. Inwiefern solche Unstetigkeiten in einem RGS prinzipieller Natur sind, hängt entscheidend von der konkreten Implementierung ab.

4 Untersuchung der Arbeitsweise von studentischen Probanden

Dieses Kapitel beschreibt den Praxisteil der Dissertation in Form einer qualitativ empirischen Studie. Gegenstand ist die Arbeitsweise von studentischen Probanden im Umgang mit DGS (EUKLID DynaGeo) und RGS (Geometry Expressions). Die dreizehn Probanden wurden hierfür während eines aufgabenzentrierten Interviews videografiert.

4.1 Praktische Forschungsfragen und Design der Untersuchung

In diesem Unterkapitel werden ausgeführt: die praktischen Forschungsfragen, die Auswahl der Probanden, die Auswahl der Softwarevertreter, der Ablauf der Software-Schulungen und der Untersuchung und die Grundsätze der Videointerviews. Das Auswertungsverfahren verdient ein eigenes Unterkapitel und wird in 4.2 vorgestellt.

Praktische Forschungsfragen

In der Einleitung haben wir erfahren, dass der Wunsch von Schülern nach relationalen Werkzeugen bereits in [Hölzl94, S. 90 ff.] dokumentiert wurde. Das war der Anlass für die Frage, welche Software seitdem entwickelt wurde und welche didaktischen Möglichkeiten sich daraus ergeben.

Praktische Forschungsfragen

(F1) Wie gehen Lernende mit den Möglichkeiten von Geometry Expressions als Vertreter eines RGS um?

(F2) Wie kommen Lernende mit dem Konzept Bedingungen setzen innerhalb der Umgebung von Geometry Expressions zurecht?

(F3) Können Lernende geeignete Werkzeuge innerhalb einer Software-Umgebung auswählen, um ein vorgegebenes Problem zu lösen?

Auswahl der Probanden

Die Probanden wurden im Rahmen der Verfügbarkeit ausgesucht unter Berücksichtigung folgender Parameter:

1. erstes Semester,
2. Studiengang Mathematik für das Haupt-/Realschullehramt oder das gymnasiale Lehramt und
3. keine Vorerfahrung mit Geometriesoftware.

Insgesamt fanden sich zwölf Probandinnen und ein Proband, somit gab es für geschlechtsspezifische Fragestellungen keine Grundlage.

Auswahl der Softwarevertreter

Neben RGS habe ich auch DGS als Softwaretyp für die Untersuchung ausgewählt. Der Hauptgrund dafür liegt in dem Ansatz einer Abgrenzung zu einem etablierten System (DGS) und der Forschungsfrage (F3).

Als Vertreter von DGS habe ich mich für das Programm EUKLID DynaGeo entschieden, da dieses zu diesem Zeitpunkt weit verbreitet war. Bei RGS fiel meine Wahl auf das Programm Geometry Expressions, da dieses in den USA bereits benutzt wurde und seine Benutzer-Schnittstelle relativ weit entwickelt war.

Ablauf der Software-Schulungen und der Untersuchung

Die Softwareschulungen des ersten Durchgangs fanden am 17. und 18. November für DGS und am 24. und 25. November 2010 für RGS statt. Die Softwareschulungen des zweiten Durchgangs fanden am 5. und 10. Mai 2011 für DGS und am 12. Mai für RGS statt. Jede Schulung bestand aus einer Präsentation in Form von Frontalunterricht, anschließender selbständiger Bearbeitung von Übungsaufgaben und deren Besprechung im Plenum. Dadurch wurde der Input für alle Teilnehmer möglichst einheitlich gehalten. Bei einer freien Beschäftigung mit Arbeitsmaterial wäre ein einheitlicher Input für alle Teilnehmer nicht in diesem Umfang gewährleistet worden. Ein DGS bildet die üblichen Werkzeuge Zirkel, Lineal und weitere virtuell ab, liegt somit für Lernende näher an der Geometrie mit Papier und Bleistift als ein RGS. Vor diesem Hintergrund finde ich es daher bei der Software-Schulung der Probanden sinnvoll, erst DGS zu behandeln und dann abgrenzend dazu RGS. Die beiden Einführungen in die Software dauerten jeweils ca. 90 Minuten und waren ähnlich gegliedert. Behandelt wurde bei der Einführung in DGS:

1. der Einstieg in Benutzeroberfläche die von EUKLID DynaGeo,
2. freie und abhängige Objekte,
3. das funktionale Prinzip,
4. der Satz vom Mittelpunkt des Dreiecksumkreises und
5. der Satz des Thales.

Die Themen der RGS-Einführung waren:

1. der Einstieg in die Benutzeroberfläche von Geometry Expressions,
2. das Hauptprinzip der RGS,
3. Relationen und Einschränkungen und
4. der Kongruenzsatz SSS.

Geometrische Grundlagen wie der Satz vom Mittelpunkt des Dreiecksumkreises, der Satz des Thales und der Kongruenzsatz SSS wurden behandelt, um ein fachliches Mindestniveau sicherzustellen. Die zugehörigen Schulungsmaterialien sind in den Abschnitten 7.1 und 7.2 des Anhangs aufgeführt.

Es gab zwei Durchgänge der Interviews: im Dezember 2010 und im Mai 2011. Im ersten Durchgang fanden fünf Interviews mit neun Probanden statt (ein Einzelinterview, vier

Zweierinterviews), im zweiten Durchgang fanden zwei Interviews mit jeweils zwei Probanden statt. Jedes Interview dauerte ca. zwei Zeitstunden.

Grundsätze der Videointerviews

Die Videointerviews wurden in den folgenden Punkten einheitlich durchgeführt: Die Aufgaben wurden auf einzelnen Blättern getrennt ausgeteilt, das heißt auf einem Blatt stand genau eine Aufgabe. Aufgaben wurden individuell eingereicht, abhängig vom vermuteten Leistungsniveau der Probanden. Allen Interviews gemeinsam war eine leichte Einstiegsaufgabe. Die erste Handlungsaufforderung durch den Interviewer lautete, sich die Aufgabenstellung in Ruhe durchzulesen. Probanden hatten die Wahl zwischen EUKLID DynaGeo oder Geometry Expressions. Daneben durften auch Papier und Bleistift benutzt werden. Die Probanden arbeiteten zu zweit an einem Computer (einzige Ausnahme: ein Einzelinterview) und wechselten sich mit der Bedienung ab. Des Weiteren sollten die Probanden laut denken.

4.2 Vorstellung und Begründung des Auswertungsverfahrens

Im Unterkapitel „Problem der Übertragung auf mathematikdidaktische Fragestellungen“ verweist HATTERMANN in [Hattermann11, S. 68] mit folgenden Worten auf [Wittmann02]:

> „*Forschungsvorhaben der Mathematikdidaktik sind aufgrund ihrer Verortung in einer Grenzdisziplin zur Fachmathematik, Pädagogik, Psychologie, Geschichte und Soziologie, vgl. Wittmann [2002, S. 2], besonderen Schwierigkeiten bei der Auswahl von Untersuchungsmethoden und deren genauer Konzeption ausgesetzt. So sind Lehrbücher zur qualitativen Sozialforschung auf sozialwissenschaftliche Fragestellungen und Forschungskonzeptionen ausgerichtet, sodass eine barrierefreie Übertragung auf konkrete Fragestellungen der Mathematikdidaktik hinsichtlich der Forschungsmethoden, deren Durchführung und Evaluation bzw. der Anwendung von modernen Gütekriterien nicht immer problemlos durchführbar ist.*“

Auf der gleichen Seite kommt HATTERMANN zu dem Schluss:

> „*Aufgrund des Vorhabens, das Verhalten von Probanden in 3D-dynamischen Geometriesystemen hinsichtlich des Zugmoduseinsatzes zu erforschen, ist ein qualitativer Zugang dem Forschungsgegenstand gegenüber als angemessen anzusehen*.“
> [ebenda, S. 68]

Dieser Einschätzung folgend war mein erstes Referenzwerk für die Formulierung des Auswertungsverfahrens die qualitative Inhaltsanalyse [Mayring10]. Dort schreibt der Autor auf Seite 29:

1. *„Eine qualitative Inhaltsanalyse darf die Vorzüge quantitativer Techniken, wie sie im Bereich der Kommunikationswissenschaften entwickelt wurden, nämlich deren systematisches Vorgehen, nicht aufgeben. Sonst muss sie sich Vorwürfe des Impressionistischen, des Beliebigen gefallen lassen.*

2. *Eine qualitative Inhaltsanalyse darf ihr Material nicht isoliert, sondern als Teil einer Kommunikationskette verstehen. Sie muss es in ein Kommunikationsmodell einordnen.*

3. *Viele Grundbegriffe quantitativer Inhaltsanalyse lassen sich auch in einer qualitativen Inhaltsanalyse beibehalten. So vor allem die Konstruktion und Anwendung eines Systems von Kategorien als Zentrum der Analyse.*

4. *Eine qualitative Inhaltsanalyse muss sich wie jede wissenschaftliche Methode an Gütekriterien überprüfen lassen."*

Als ein Merkmal hermeneutischer Wissenschaft sieht MAYRING „*dass wenig versucht wird, einzelne Techniken des Verstehens zu entwickeln, sondern eher die Grundstruktur auszuführen*" (ebenda, S. 30). MAYRING lobt die Ansätze von DANNER zu konkreten Verfahrensschritten, um die hermeneutische Methodologie weniger theoretisch-abstrakt durchzuführen, vgl. [Danner79, S. 89-90]. Diese bestehen aus den drei Hauptpunkten, die ich sinngemäß zusammenfasse:

(A) Vorbereitende Interpretation: Welche Vormeinung und welche Erwartungen hat der Interpret? Was ist die Kernaussage des Textes?

(B) Textimmanente Interpretation: Wie kann der Text grob oder fein gegliedert werden? Wie ist im Sinne des hermeneutischen Zirkels zwischen dem Ganzen und seinem Teil hin- und herzuwechseln? Wie geht der Interpret mit einem Widerspruch um?

(C) Koordinierende Interpretation: Wie lauten die bewussten und unbewussten Voraussetzungen des Autors? Wie können die Zusammenhänge als Hypothesen formuliert werden? [Mayring10, S. 30-31]

Als Zwischenschritt auf dem Weg zu einem Auswertungsverfahren habe ich die Gedanken von HATTERMANN und MAYRING in vier Leitgedanken übertragen:

1. Unabhängig von MAYRING liegt mein Kommunikationsmodel im lauten Denken der Probanden und meinen Fragen als Interviewer, die dieses fortlaufend initiieren sollen, begründet. Die Kommunikation zwischen den Probanden untereinander und zwischen den Probanden und mir wird schließlich abgebildet in der Transkription des gesprochenen Wortes der Videoaufnahmen.

2. Die Untersuchung ist fest in den Kontext von Geometriesoftware eingebettet, dementsprechend sinnvoll finde ich neben der Transkription der Sprache auch die Dokumentation der Aktivitätsbeschreibung und der Bildschirmaufnahmen.

3. Mit Blick auf den Punkt (C) lege ich hiermit offen, dass ich die Hypothese (H1) bereits vor den Interviews aufgrund meiner eigenen Erfahrung als Benutzer von Geometry Expressions hatte.

4. Ein wesentliches Gütekriterium besteht für mich darin, aus Beobachtungen gewonnene Hypothesen sowohl theoretisch zu unterfüttern als auch möglichst breit und rigoros anzugreifen.

Bei der gedanklichen Auseinandersetzung mit dem vierten Punkt hatte ich die Assoziation eines Disputes zwischen zwei Parteien, die sich vor Gericht befinden und ihren Standpunkt vertreten. Geht man von dieser Situation zeitlich zurück, so gelangt man zum Kontext eines Tatortes: Dieser ist möglichst unvoreingenommen und sachlich zu untersuchen, man sammelt Beobachtungen, manche davon werden später zu Indizien, man befragt Zeugen und so weiter.

Freilich lässt sich einwenden, dass sich der Interviewer und Forscher bereits an diesem „Tatort“ bzw. mitten im Geschehen befindet und interagiert, gleichwohl habe ich mich bei der Formulierung des Auswertungsverfahrens (und später der Auswertung) an dieser Metapher festgehalten:

Auswertungsverfahren

1. Aus der Transkription werden Beobachtungen gesichtet.
2. Die Beobachtungen werden zu einer oder mehreren möglichst falsifizierbaren Hypothese/n verdichtet.
3. Die Hypothese wird analysiert:
   a) Die Hypothese wird theoretisch unterfüttert.
   b) Die Hypothese wird theoretisch angegriffen.
4. Die Hypothese wird angenommen, modifiziert oder abgelehnt.

Die in Unterkapitel 4.4 ab S. 120 transkribierten Passagen Nr. 1 bis Nr. 7 habe ich ausgewählt, da ich sie mit Blick auf die Forschungsfragen als relevant einschätze. Das heißt, eine Passage wurde ausgewählt, wenn sie als Indiz dienen kann, eine Hypothese zu generieren, diese zu untermauern oder anzugreifen. Der Begriff „Indiz“ (von lat.: *indicare*, zu Deutsch „anzeigen“) stammt bekanntlich aus den Rechts- bzw. Kriminalwissenschaften und bildet die Mitte der Steigerungskette *Behauptung-Indiz-Beweis*.

So schätze ich a priori Passagen, in denen Probanden innerhalb des RGS Bedingungen setzen, als grundsätzlich relevant für die Forschungsfrage (F2) ein und wähle aus dieser Teilmenge weitere Passagen aus. Bei der Eingrenzung des Datenmaterials für (F3) konzentriere ich mich auf die Passagen, in denen eine Konfiguration mit Software (DGS/RGS) umgesetzt wurde. Bei der Auswahl für (F1) gehe ich allgemein von den Interview-Passagen aus, in denen Probanden eine Konfiguration mit Geometry Expressions umsetzen bzw. explorieren.

U. ECO formuliert im Unterkapitel „Was ist Wissenschaftlichkeit?“ seines Buches [Eco10]

> *„Sie* [die Arbeit] *wird erst dann wissenschaftlich, wenn sie meine Erfahrung öffentlich und kontrollierbar dokumentiert. So könnte sie jeder wiederholen, sei es, um zu gleichen Ergebnissen zu kommen, sei es, um herauszufinden, dass meine Ergebnisse zufällig und keineswegs auf meinen Einfluss zurückzuführen waren, sondern auf Faktoren, die ich nicht berücksichtigt habe.“* [Eco10, S. 45]

Mithin bleiben bei der Auswahl und Interpretation von Passagen ein menschlicher Faktor und damit eine gewisse Willkür übrig. Es ließe sich für einen Computer nicht determinieren, warum genau diese eine Szene ausgewählt wurde und eine andere hingegen nicht. Dementsprechend ist ein Forscher in der Pflicht: Bei der späteren qualitativen Auswertung (ab S. 159) werden Hypothesen nicht nur theoretisch unterfüttert, sondern auch angegriffen.

4.3 Auswahl und Besprechung der Interviewaufgaben

Zur Vorbereitung der Interviews habe ich die folgenden Aufgaben zusammengestellt. Hier sind die internen Bezeichnungen der Aufgaben ergänzt, bei den Handreichungen für die Probanden war das nicht der Fall. Die Aufgaben finden Sie auch als Übersicht im Abschnitt 7.3 des Anhangs.

Tabelle 12: Quellenangabe der Interviewaufgaben

Aufgabe	Quelle bzw. Entstehung
„Quadrat“	Entstanden durch spielerische Anwendung mit relationalen Eigenschaften einer Raute bzw. eines Quadrates
„Umkreismittelpunkt eines Dreiecks“	Standardaufgabe der Geometrie
„Umkreis Vierecke“	Als Fragestellung spontan entstanden in einem Interview im Anschluss an die Aufgabe „Umkreismittelpunkt eines Dreiecks“
„Abrutschende Leiter“	Gefunden in [Filler11]
„Blumenmuster“	Entstanden durch geometrische Variation bzw. Ergänzung der Konfiguration sechsmaliges Abzirkeln eines Kreises
„Ortslinie“	Entstanden durch spielerische Anwendung der Prinzipien der Variation von [Schupp02], ausgehend von der Mittelsenkrechten als Ortslinie
„Gemeinsame Tangenten zweier Kreise“	Mündliche Kommunikation mit R. OLDENBURG
„Eigenmann Nr. 78“	[Eigenmann81, S. 13]
„Eigenmann Nr. 107“	[Eigenmann81, S. 17]
„Eigenmann Nr. 51 des zweiten Teils“	[Eigenmann81, S. 39]

Allgemeine Begründung der Interviewaufgaben

Mit Blick auf die Forschungsfragen sollte die Bearbeitung der Aufgaben durch die Probanden typische Situationen im Umgang mit DGS bzw. RGS generieren. Für die Interviews habe ich ein Aufgabenportfolio zusammengestellt, um während der Befragung den Schwierigkeitsgrad für die Probanden anpassen zu können. Dementsprechend kamen einige Aufgaben öfter zum Einsatz als andere. Außerdem habe ich neben geschlossenen Aufgabenformulierungen auch offene ausgewählt, um den Probanden Lösungs- und Bedienungsfreiraum zu lassen. Vertreter der offenen Aufgaben sind die minimalistisch formulierten Eigenmann-Aufgaben. Im Anhang 7.4 auf S. 231 finden Sie die Auflistung der charakteristischen Eigenschaften dieser Aufgaben, eine ausführlichere Darstellung wird in [Schneider09] gegeben.

Ein weiterer Teil der Vorbereitung bestand darin, mögliche Lösungswege der Probanden und auch mögliche Schwierigkeiten und Sackgassen bei der Umsetzung einer Konfiguration auf der Softwareebene zu bedenken. Die nachfolgende Besprechung fällt stellenweise etwas umfangreich aus, einige der Eventualitäten habe ich während der Interviews nicht benötigt, aber mir ging es darum, möglichst sattelfest in die Untersuchung zu gehen.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht, welche Aufgaben in welchen Interviews gestellt wurden und welche Software von den Probanden benutzt wurde.

Tabelle 13: Interviews aufgeschlüsselt nach der Reihenfolge der gestellten Aufgaben und der verwendeten Software

Aufgabe **Interview**	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
Anne & Sonja	Umkreis-Mittelpunkt GE, Euklid	Quadrat GE	EIG 107 GE, Euklid	Blumen-muster GE	Leiter GE	-	-
Lara-Marie	Umkreis-mittelpunkt GE, Euklid	Quadrat GE, Euklid	EIG 107 GE, Euklid	EIG 78 GE, Euklid	Blumen-Muster GE	Gemeinsame Tangenten GE	Leiter GE
Tina & Natalie	Quadrat GE, Euklid	Umkreis-mittelpunkt GE	EIG 51 (II) GE, Euklid	Gemeinsame Tangenten GE	Leiter GE	-	-
Elena & Irmgard	Quadrat GE	Umkreis Vierecke GE, Euklid	Umkreis-mittelpunkt GE	EIG 78 GE, Euklid	Leiter Euklid, GE	Ortslinie GE	-
Lena & Hasan	Quadrat GE, Euklid	Umkreis-mittelpunkt GE	EIG 51 (II) GE	Umkreis Vierecke GE	Leiter GE, Euklid	EIG 78 GE, Euklid	-
Jennifer & Daniela	Quadrat GE, Euklid	Umkreis-mittelpunkt GE, Euklid	Blumen-muster GE	Gemeinsame Tangenten GE	Umkreis Vierecke GE, Euklid	-	-
Beatrice & Selina	Quadrat GE, Euklid	Umkreis-Mittelpunkt GE, Euklid	Gemeinsame Tangenten GE	Blumen-muster GE	-	-	-

Die Aufgaben Quadrat, Blumenmuster, Eigenmann-Nr. 78, Umkreismittelpunkt und Eigenmann-Nr. 51 (II) kommen später in *den ausgewählten Interview-Passagen* ab S. 120 vor, also besprechen wir diese als Erstes. Die Diskussion der Interviewaufgaben gliedert sich in die folgenden Teile:

1. Aufgabenstellung
2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration
3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

4.3.1 Aufgabe „Quadrat“

1. Aufgabenstellung

a) Ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten zwangsläufig ein Quadrat?

b) Erstellen Sie mit einem Programm Ihrer Wahl ein Quadrat. Es soll möglich sein, an einem Eckpunkt zu ziehen und das Quadrat so größer bzw. kleiner zu machen.

c) Wann genau ist ein Viereck ein Quadrat? Bitte geben Sie eine kurze, präzise Formulierung:

Ein Viereck ist ein Quadrat genau dann, wenn ____

2. Mögliche Umsetzungen der Konfigurationen mit einem DGS und Exploration

Für die Antwort des Aufgabenteils a) ist keine Software nötig. Eine Begründung kann etwa mit vier gleich langen Stiften oder als gleich lang gedachten Fingern gegeben werden, die zu einer Raute zusammengesetzt werden, dessen Seiten nicht senkrecht aufeinander stehen.

Im Aufgabenteil b) ist für ein Quadrat folgende Konstruktion denkbar:

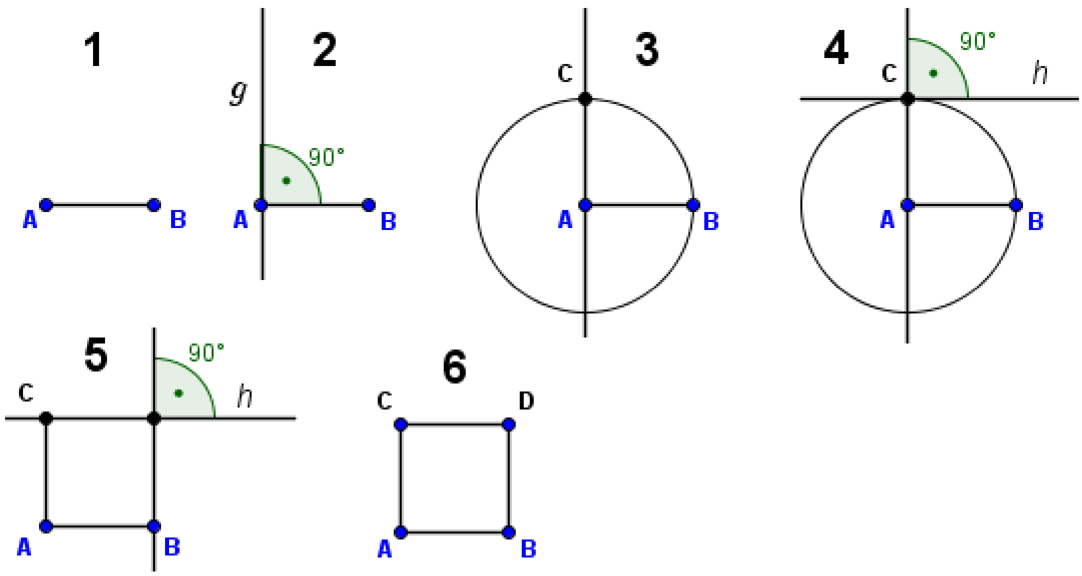


Abbildung 94: Eine mögliche Konstruktion eines Quadrates

1. Konstruiere eine Strecke $\overline{AB}$.

2. Erstelle die Senkrechte g auf der Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt A.

3. Schlage den Kreis K um A mit Radius $r = |\overline{AB}|$. Der Kreis K schneidet die Senkrechte g in den Punkten C und C'.

4. Konstruiere die Senkrechte h auf der Geraden g durch den Punkt C.

5. Konstruiere die Senkrechte i auf der Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt B. Die Senkrechte i schneidet die Gerade h im Punkt D.

6. Verbinde die Punkte A,B,C,D zu einem Quadrat.

Danach kann an den freien Punkten A und B gezogen werden, um die Lage und Größe des Quadrates zu variieren.

Eine andere Lösung besteht darin, mit einer Diagonalen anstatt einer Seite zu beginnen. Hier benutzt man die Eigenschaft, dass die Diagonalen in einem Quadrat senkrecht aufeinander stehen und sich gegenseitig halbieren:

1. Konstruiere die Strecke $\overline{AB}$.
2. Konstruiere den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.
3. Konstruiere die Senkrechte g auf der Strecke $\overline{AB}$ durch den Punkt M.
4. Schlage den Kreis K um M mit Radius $r = 0{,}5 \cdot |\overline{AB}|$. Der Kreis K schneidet die Senkrechte g in den Punkten C und D.
5. Verbinde die Punkte A,B,C,D zu einem Quadrat.

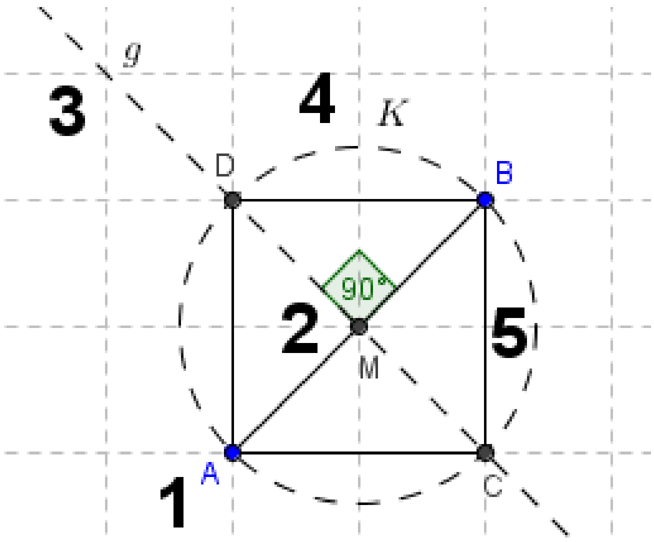


Abbildung 95: Konstruktion eines Quadrates ausgehend von einer Diagonalen

Hier kann ebenfalls an den freien Punkten A und B gezogen werden, um die Lage und Größe des Quadrates zu ändern.

Im Teil c) sollten Probanden als definierenden Eigenschaften eines Quadrats formulieren können, dass alle Seiten des Vierecks gleich lang sind und zwei benachbarte Seiten senkrecht zueinander stehen.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfigurationen mit einem RGS und Exploration

Mit einem RGS wird ein gleichseitiges Viereck durch folgende Komposition umgesetzt:

1. Erzeuge vier Punkte A,B,C,D und vier Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CD}$.
2. Übermittle die vier Bedingungen: $|\overline{AB}| = a$, $|\overline{AD}| = a$, $|\overline{BC}| = a$ und $|\overline{CD}| = a$.

Hier wird wie üblich eine Formvariable a benötigt, um zu fordern, dass zwei Strecken gleich lang sein sollen.

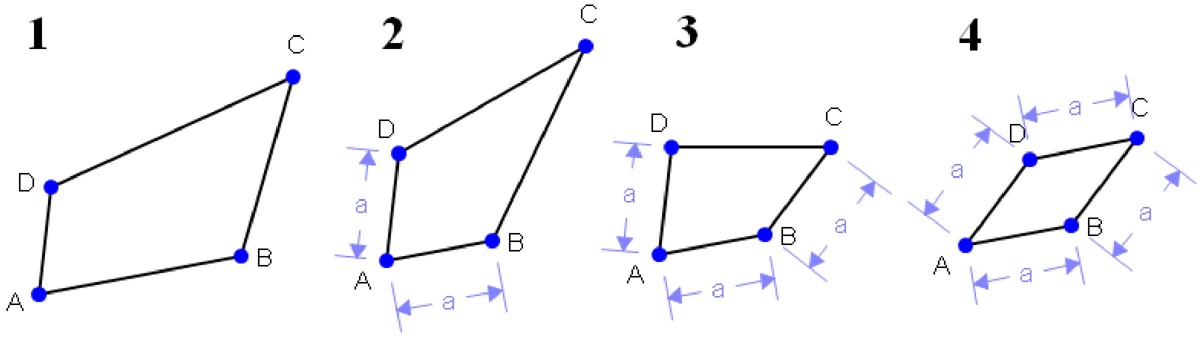


Abbildung 96: Umsetzung eines gleichseitigen Vierecks mit Geometry Expressions

In der Bildfolge sehen Sie, wie ein allgemeines Viereck $ABCD$ Schritt für Schritt in ein gleichseitiges Viereck umgewandelt wird. Das Viereck in der Figur 4 ist offenkundig kein Quadrat, es fehlt die Bedingung, dass zwei benachbarte Seiten senkrecht aufeinander stehen. Diese ergänzen wir:

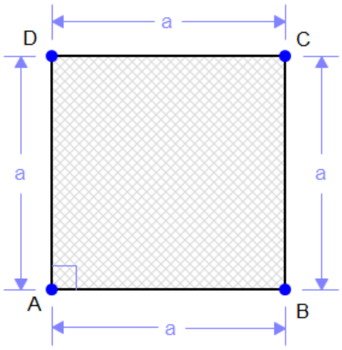


Abbildung 97: Die Raute ist zum Quadrat geworden.

4.3.2 Aufgabe „Blumenmuster“

1. Aufgabenstellung

Gegeben sei ein Kreis K mit Mittelpunkt M durch den Punkt P. Erzeugen Sie sechs gleich große Kreise um den Kreis K, die K berühren, so dass folgendes Blumenmuster entsteht.

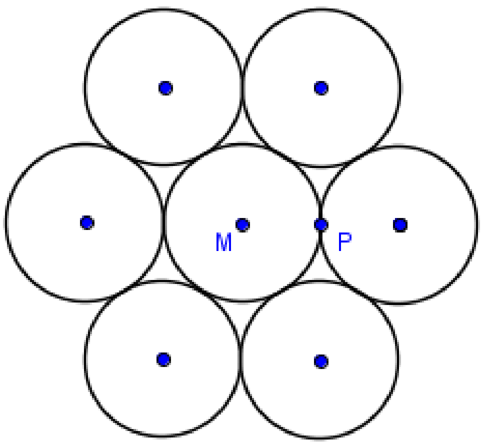


Abbildung 98: Figur zur Aufgabe „Blumenmuster"

Wenn Sie benachbarte Mittelpunkte der sechs äußeren Kreise miteinander verbinden erhalten Sie ein Sechseck. Welche Eigenschaften besitzt dieses Sechseck?

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Wir ergänzen die Figur durch drei gleichseitige Dreiecke. Die Punkte A, B, C, D, E und F der folgenden Abbildung sind dann die Mittelpunkte der gesuchten Außenkreise:

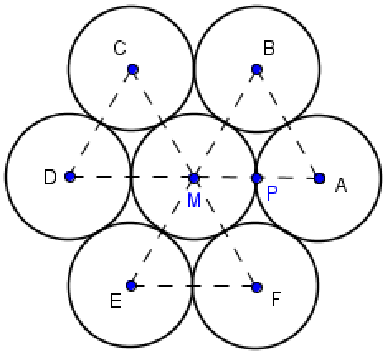


Abbildung 99: Drei gleichseitige Dreiecke werden als Hilfsobjekte eingeführt.

Die Seitenlänge der gleichseitigen Dreiecke beträgt $s = 2|\overline{MP}|$. Mit dieser Zerlegung kann ein Proband zu einer Konstruktion der gesuchten Punkte A bis F gelangen:

1. Konstruiere den Halbstrahl $\overline{MP}$. Schlage einen Kreis um M mit Radius $r := |\overline{MP}|$. Dieser Kreis schneidet den Halbstrahl im Punkt A.
2. Schlage einen Kreis um M mit Radius $2r$ und einen Kreis um A mit Radius $2r$. Beide Kreise schneiden sich oberhalb des Halbstrahls $\overline{MP}$ im Punkt B und unterhalb im Punkt F.
3. C ist der Spiegelpunkt von A bzgl. der Strecke $\overline{MB}$.
4. D ist der Spiegelpunkt von A bzgl. M.
5. E ist der Spiegelpunkt von C bzgl. der Strecke $\overline{MA}$.
6. Schlage jeweils einen Kreis um A,B,C,D,E und F mit Radius r.

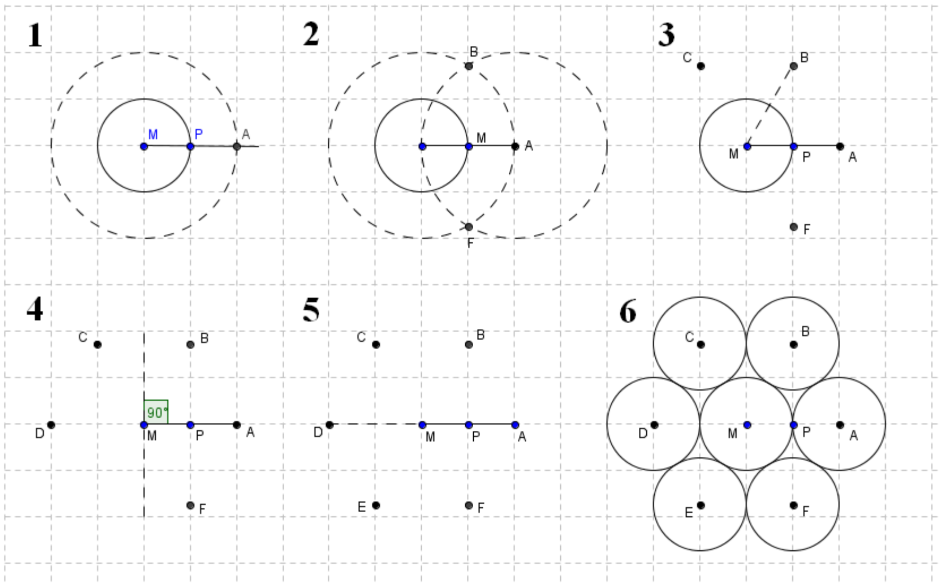


Abbildung 100: Eine mögliche Konstruktion des Blumenmusters

Ein anderer Lösungsansatz besteht im sechsfachen Abzirkeln des zentralen Kreises, ausgehend vom Punkt P jeweils durch M:

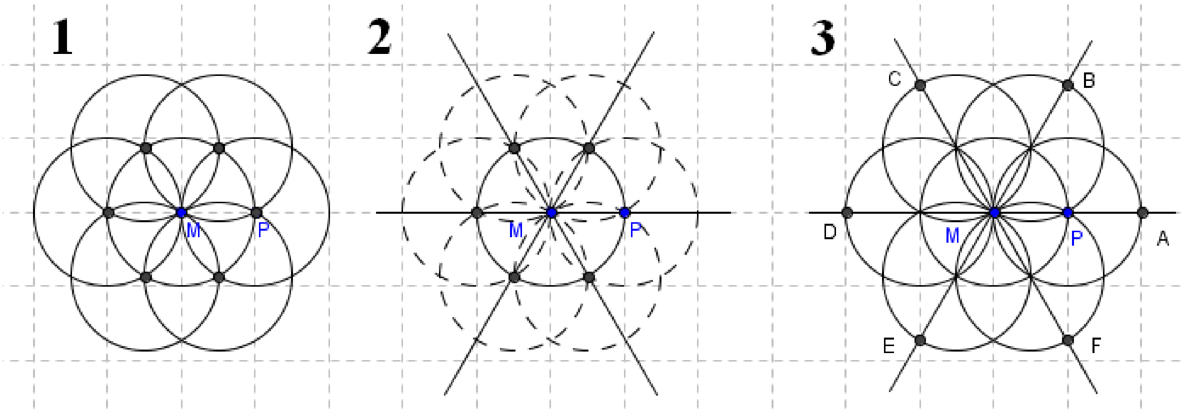


Abbildung 101: Alternativer Lösungsweg mit DGS der Aufgabe „Blumenmuster“

In diesem Lösungsweg entstehen die Mittelpunkte A,B,C,D,E der gesuchten Außenkreise als Schnittpunkte zwischen den abgezirkelten Kreisen und den Symmetrieachsen.

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Der Ausgangskreis K berührt die sechs äußeren Kreise, außerdem berühren sich jeweils zwei äußere benachbarte Kreise und die Radien aller Kreise sind gleich groß. Somit könnte ein Proband dieses Blumenmuster durch Abstands- und Tangentialbedingungen umsetzen:

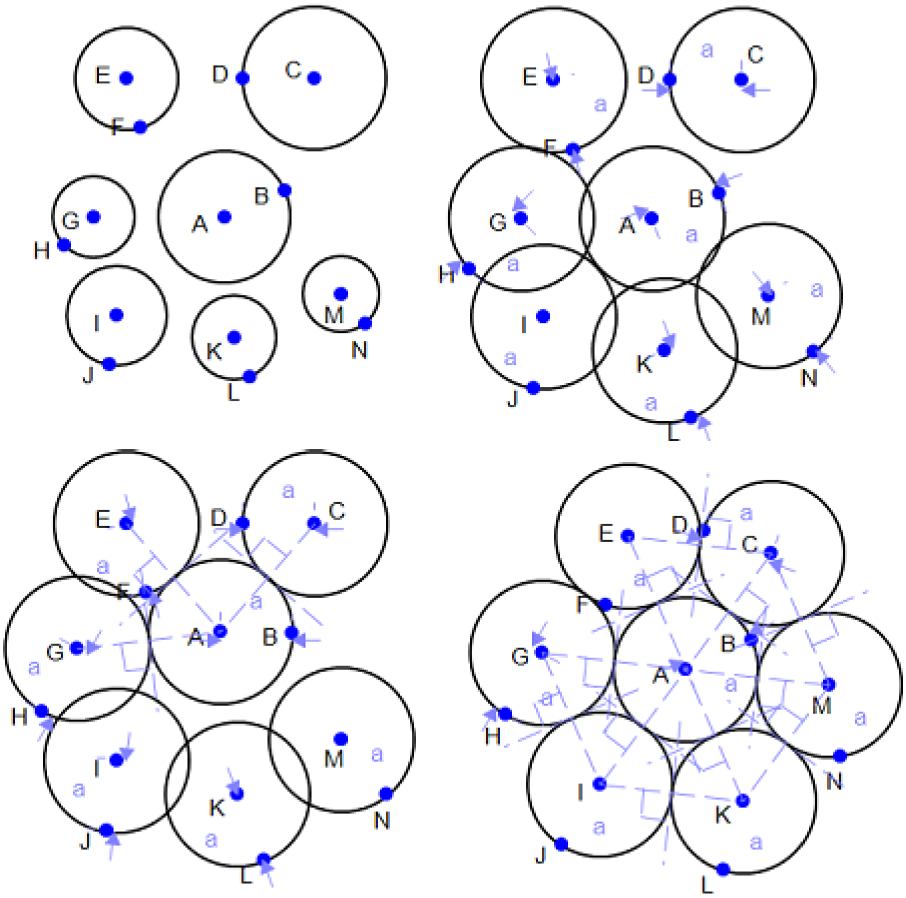


Abbildung 102: Umsetzung der Konfiguration „Blumenmuster“ mit Geometry Expressions

Hier sieht man deutlich, wie sich der Anfangszustand mit steigender Zahl der übermittelten Bedingungen Schritt für Schritt der gewünschten Konfiguration annähert. Als Kompositionsprotokoll formuliert lautet die obige Bildfolge:

1. Erzeuge sieben Kreise.
2. Übermittle die sieben Bedingungen, dass jeder Radius gleich derselben Variablen ist.
3. Realisiere die Bedingungen, dass jeder äußere Kreis tangential zum Mittelkreis liegt.
4. Realisiere die Bedingungen, dass jeder äußere Kreis tangential zu jedem benachbarten, äußeren Kreis liegt.

4.3.3 Aufgabe „Eigenmann Nr. 78“

1. Aufgabenstellung

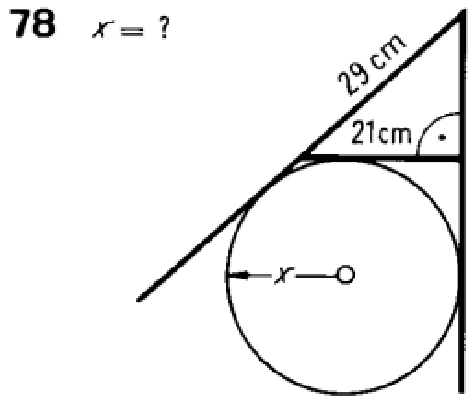


Abbildung 103: Figur zur Eigenmann-Aufgabe Nr. 78

Typisch für Eigenmann-Aufgaben ist, dass keine textuelle Handlungsaufforderung formuliert wird und dass die zugehörige Abbildung als Figur interpretiert werden muss. In der Aufgabe Nr. 78 soll ein Betrachter annehmen, dass der Kreis jeweils tangential zu allen drei angrenzenden Strecken liegt. Wir führen für die weitere Diskussion einer möglichen Lösung Bezeichnungen und Hilfslinien ein:

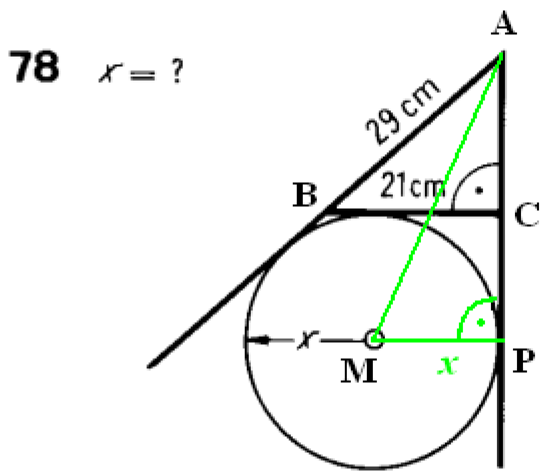


Abbildung 104: Eigenmann-Aufgabe Nr. 78 mit eingeführten Bezeichnungen und Hilfslinien

Bei dem Kreis handelt es sich um einen Ankreis des Dreiecks ABC. Gesucht ist der Radius x. Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, in ihm sind zwei Seitenlängen bekannt. Die dritte Seite ergibt sich also mit dem Satz des Pythagoras:

$$
\begin{aligned}
|\overline{AC}| &= \sqrt{(29cm)^2 - (21cm)^2} \\
&= 20cm.
\end{aligned}
$$

Anschließend lassen sich die Winkel α und β bestimmen:

$$\tan(\beta) = 20/21,$$

$$\beta \approx 43{,}6°$$

Mit der Winkelsumme im Dreieck ergibt sich weiter: $\alpha \approx 46{,}4°$.

Der Halbstrahl $\overline{AM}$ ist die Winkelhalbierende des Winkels bei A. Daher lässt sich die Rechnung fortsetzen durch Anwendung des Tangens im Dreieck AMP:

$$\tan\left({}^{\alpha}/_{2}\right) = \frac{x}{20 + x}.$$

Nach kurzer Umformung und Einsetzen des Wertes von α ergibt sich für die gesuchte Größe:

$$x = 15cm.$$

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Mit Blick auf die gegebenen Seitenlängen empfiehlt sich ein Maßstab $1:10$. Das erste Teilziel besteht in der Konstruktion des oberen Dreiecks ABC. Danach wird der Kreis K als Ankreis konstruiert. Der zugehörige Mittelpunkt M entsteht als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden. Einen Punkt auf der Kreislinie K konstruiert man schließlich als Schnittpunkt eines Lotes von M auf einen der beiden Halbstrahlen.

Als ausformulierte Konstruktionsbeschreibung erhalten wir:

1. Konstruiere eine Strecke $\overline{BC}$ der Länge $2{,}1cm$.
2. Konstruiere eine Senkrechte g auf $\overline{BC}$ durch den Punkt C.
3. Schlage einen Kreis k um B mit Radius $2{,}9cm$.
4. Der Kreis k schneidet g oberhalb von C im Punkt A.
5. Verlängere die Strecke $\overline{AC}$ über C hinaus zur Halbgeraden h.
6. w_1 ist die Winkelhalbierende von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.
7. w_2 ist die Winkelhalbierende von $\overline{BC}$ und dem Halbstrahl h ausgehend von B.
8. M ist der Schnittpunkt von $w_1$und w_2.
9. Fälle das Lot l von M auf g.
10. P ist der Schnittpunkt von l und g.
11. K ist der Kreis mit Mittelpunkt M durch den Punkt P.

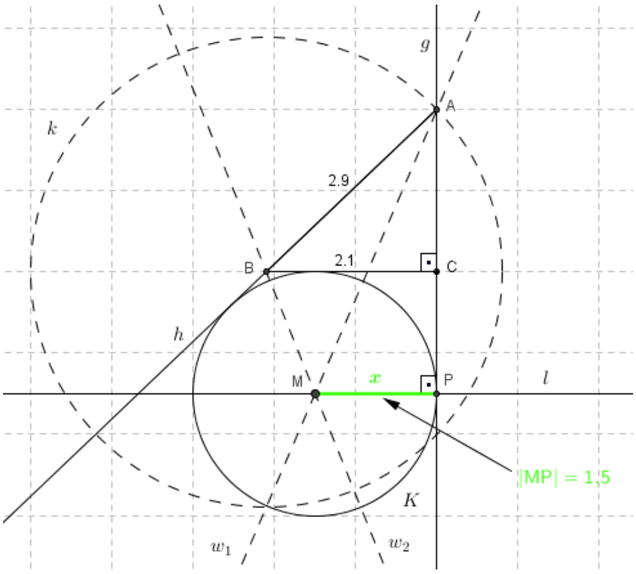


Abbildung 105: Eine mögliche Konstruktion der Figur der Eigenmannaufgabe Nr. 78

Nun kann ein Proband in dem DGS die Strecke $\overline{MP}$ abmessen lassen. Er erhält

$$x = |\overline{MP}| = 1{,}5cm.$$

Mit dem Maßstab $1:10$ ergibt sich die Lösung $x = 15cm$.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Mit einem RGS kann ein Proband die zugehörige Konfiguration folgendermaßen umsetzen:

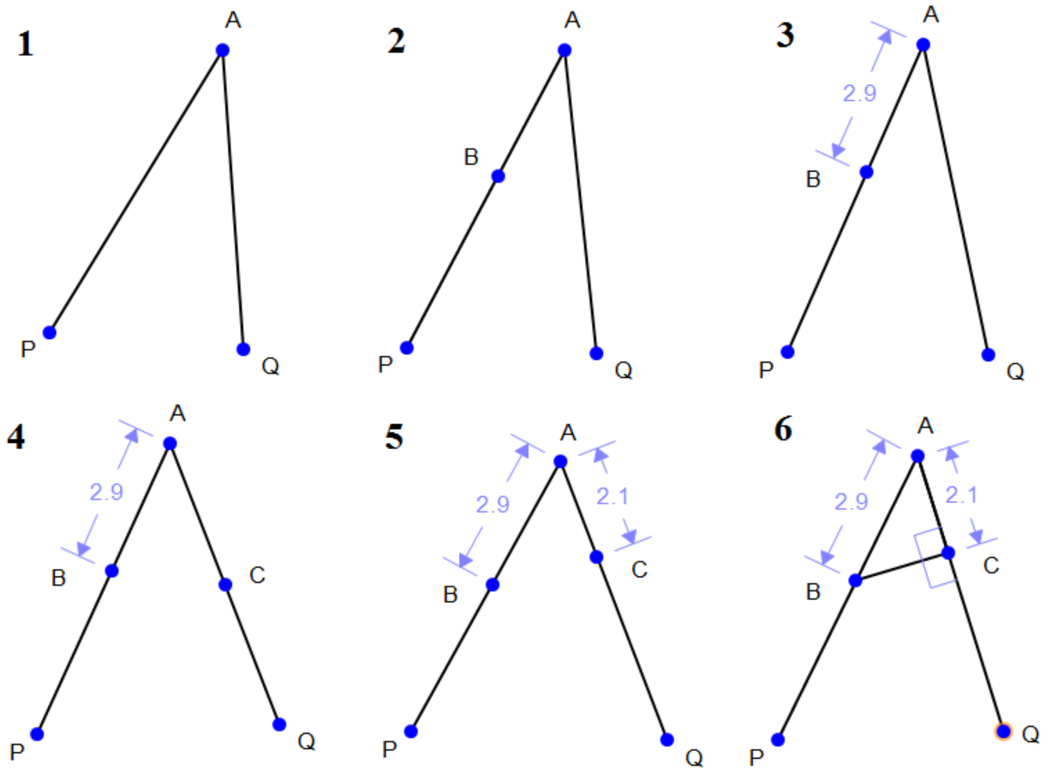


Abbildung 106: Umsetzung der Konfiguration der Eigenmann-Aufgabe Nr. 78 (Beginn Protokoll)

Kompositionsprotokoll:

1. Erzeuge einen Punkt A und zwei Halbgeraden, die von A ausgehen.
2. Setze einen Punkt B auf die linke Halbgerade.
3. Realisiere die Abstandsbedingung: $|\overline{AB}| = 2.9\ cm$.
4. Setze einen Punkt C auf die rechte Halbgerade.
5. Realisiere die Abstandsbedingung: $|\overline{AC}| = 2.1\ cm$.
6. Erzeuge die Strecke $\overline{BC}$ und setze sie orthogonal zur rechten Halbgeraden.

In der nächsten Bildfolge sehen wir, wie der Komposition ein Kreis hinzugefügt und tangential eingepasst wird.

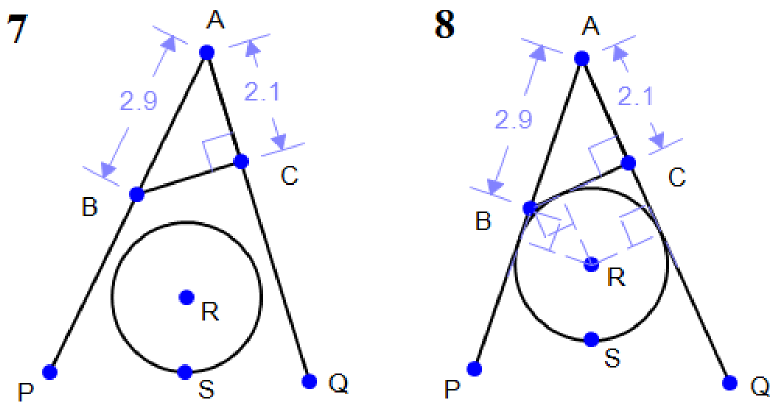


Abbildung 107: Umsetzung der Konfiguration der Eigenmann-Aufgabe Nr. 78 (Fortsetzung)

7. Erzeuge einen Kreis K unterhalb der Strecke $\overline{BC}$.
8. Realisiere die Bedingungen, dass der Kreis K jeweils tangential zur Strecke $\overline{BC}$ und den beiden Halbgeraden liegt.

Danach kann ein Benutzer in dem RGS den Radius des eingepassten Kreises messen lassen. Geometry Expressions liefert: $x = 1.5$. Mit dem veränderten Maßstab erhält ein Proband also die Lösung $15cm$.

4.3.4 Aufgabe „Eigenmann Nr. 51 (II)"

1. Aufgabenstellung

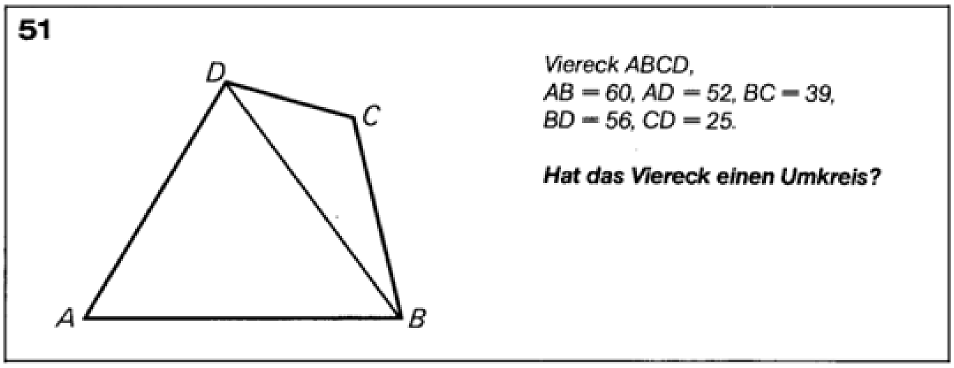


Abbildung 108: Eigenmann-Aufgabe Nr. 51 des zweiten Teils

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Mit Blick auf die Abmessungen empfiehlt sich der Maßstab $1{:}10$. Die Konfiguration lässt sich aufteilen in die beiden Dreiecke ABD und DBC. In beiden Dreiecken sind alle Seitenlängen bekannt, daher können beide Dreiecke und damit das Viereck mit der Diagonalen $\overline{BD}$ durch die Konstruktion SSS erstellt werden. Mit formalen Makros lautet eine mögliche Konstruktionsbeschreibung:

1. Konstruiere das Dreieck ABD mittels SSS,
2. Konstruiere das Dreieck DBC mittels SSS.

Eine Anwendung des Kongruenzsatzes SSS auf die Dreiecke ABD und DBC impliziert dann, dass das Viereck $ABCD$ eindeutig bestimmt ist, das heißt, im Zugmodus kann nur noch die Lage, aber nicht mehr die Form des Vierecks verändert werden.

Eine mögliche Schwierigkeit könnte den Probanden das relationale Werkzeug *Strecke fester Länge* bereiten: Dieses lässt sich zwar zweimal anwenden, um zwei Seitenlängen eines Dreiecks zu realisieren, aber nicht um das Dreieck zu vollenden, da Anfangs- und Endpunkt gleich wären, was zu einem Zirkelschluss führen würde, vgl. S. 63. Unabhängig davon könnte ein Proband den Ansatz verfolgen, zu prüfen, ob sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden.

Ein Viereck, das einen Umkreis besitzt, heißt Sehnenviereck. In einem Sehnenviereck beträgt die Winkelsumme gegenüberliegender Winkel $180°$. Mit dieser definierenden Eigenschaft wäre die Aufgabenstellung schnell durch Abmessen der Innenwinkel lösbar, allerdings gehört diese Kenntnis kaum zum abrufbaren Wissensrepertoire eines durchschnittlichen Probanden.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Ein Benutzer erzeugt Viereck $ABCD$ und die Diagonale $\overline{BD}$ und setzt dann die Seitenlängen durch Abstandsbedingungen im Maßstab $1{:}10$ um:

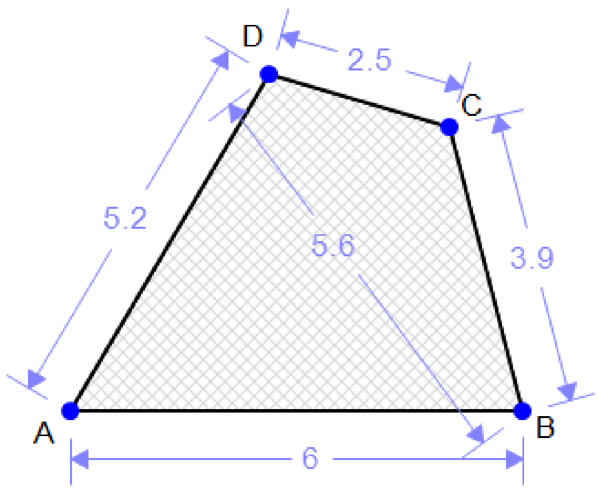


Abbildung 109: Das Viereck $ABCD$ wurde mit fünf Abstandsbedingungen umgesetzt.

1. Erzeuge vier Punkte A,B,C,D, das Viereck $ABCD$ und die Diagonale $\overline{BD}$.
2. Übermittle die Abstandbedingungen: $|\overline{AB}| = 6$, $|\overline{AD}| = 5.2$, $|\overline{BC}| = 3.9$, $|\overline{BD}| = 5.6$ und $|\overline{CD}| = 2.5$.

Durch Abwechslung zwischen der Benutzung des Zugmodus und der Übermittlung der Abstandsbedingungen sieht ein Proband, wie der Freiheitsgrad der Konfiguration kleiner wird bis er am Ende gleich 0 ist. Dann lässt sich das Viereck nicht mehr in der Form verändern, nur noch verschieben.

Theoretisch könnte nun ein Proband einen potenziellen Umkreismittelpunkt U erzeugen und dann prüfen, ob sich vier gleiche Abstandsbedingungen von U zu den Eckpunkten A,B,C,D des Vierecks mittels einer Formvariablen a übermitteln lassen. Das führt allerdings zur Fehlermeldung, dass Geometry Expressions eine Kombination von Bedingungen (Abbildung 90 auf S. 81) nicht akzeptiert. Ein Ausweg besteht im Wechsel hin zum Konstruieren: Ein Proband erzeugt zwei Mittelsenkrechten und deren Schnittpunkt U. Nun konstruiert er den Kreis K um U durch einen der vier Eckpunkte und überprüft weiter, ob dieser Kreis durch die anderen Eckpunkte verläuft:

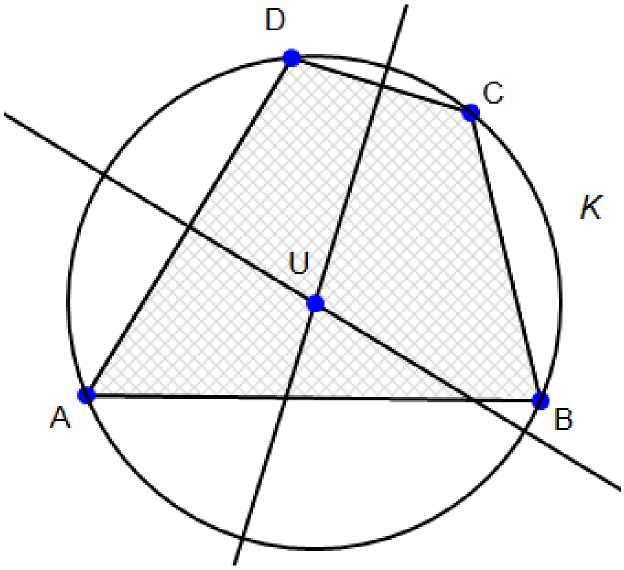


Abbildung 110: Augenscheinlich besitzt das Viereck einen Umkreis.

4.3.5 Aufgabe „Umkreismittelpunkt eines Dreiecks"

1. Aufgabenstellung

Wann liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks innerhalb des Dreiecks, wann außerhalb?

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Der Umkreismittelpunkt ergibt sich als Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten, denn die Mittelsenkrechte ist der geometrische Ort aller Punkte, die von zwei Punkten den gleichen Abstand besitzen. Wendet man das Prinzip der Vertauschung zusammen mit dem Rückwärtsarbeiten an (vgl. S.44 ff.), dann kann man alternativ mit dem Kreis K beginnen und die Eckpunkte A,B,C des Dreiecks auf diesen Kreis setzen:

1. Konstruiere einen Kreis K mit Mittelpunkt U durch einen Punkt P.
2. Setze mit dem Werkzeug Punkt auf Linie die Punkte A,B,C auf die Kreislinie von K.
3. Konstruiere das Dreieck ABC.

Dann sind alle relevanten Relationen umgesetzt, und U ist der Mittelpunkt des Umkreises K des Dreiecks ABC:

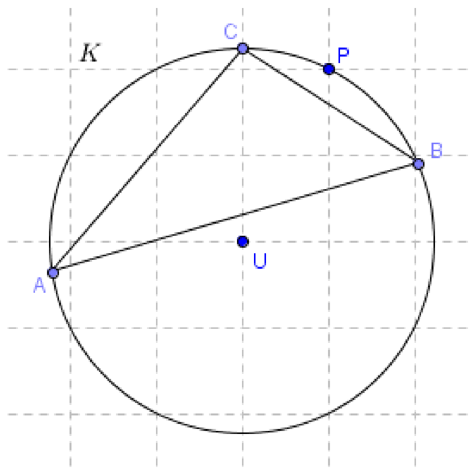


Abbildung 111: Umsetzung einer äquivalenten Konfiguration durch das Prinzip der Vertauschung

Die entstehende Konfiguration ist im Vergleich zur Konstruktion durch die Mittelsenkrechten im Zugmodus ein wenig ruhiger und enthält weniger Objekte. Die Form des Dreiecks kann im Zugmodus von DGS so verändert werden, dass der Umkreismittelpunkt einmal innerhalb des Dreiecks liegt und einmal außerhalb. In einem DGS kann der Punkt U nur dann direkt bewegt werden, wenn er ein freier Punkt ist. Das ist nur in der zweiten Konfiguration der Fall. Im ersten Fall hängt U von den Mittelsenkrechten ab und dieser wiederum hängen von den freien Punkten A, B und C ab. Hier muss also an A, B oder C so gezogen werden, dass U einmal innerhalb und einmal außerhalb des Dreiecks liegt, um die Fragestellung zu explorieren.

Das Erkennen des Spezialfalls, dass der Punkt U auf einer Dreiecksseite liegt, ist ein wichtiger Etappensieg auf dem Weg zur Lösung der Aufgabe: In diesem Fall fällt der Umkreis mit dem Thales-Kreis zusammen und das Dreieck ist rechtwinklig.

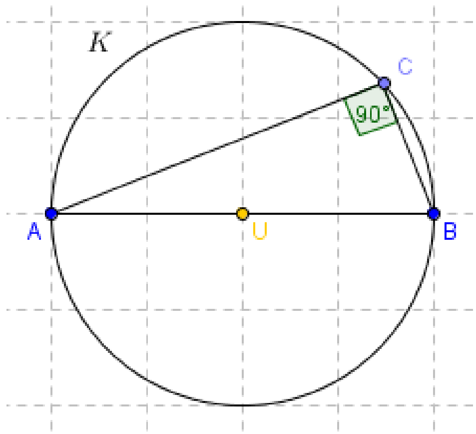


Abbildung 112: Liegt der Umkreismittelpunkt U auf einer Seite, so ist das Dreieck rechtwinklig.

In diesem Spezialfall korrespondiert also die Lage des Umkreismittelpunktes U mit dem Winkel bei C in markanter Weise. Mit dieser speziellen Konfiguration setzt sich die Lösung fort: Ein Proband verschiebt U (direkt oder indirekt) aus dem Dreieck und dann wieder zurück und beobachtet oder misst den Winkel bei C. Somit ist die Lösung der Ausgangsfrage gefunden: Ist das Dreieck spitz, dann liegt der Umkreismittelpunkt innerhalb des Dreiecks, ist das Dreieck stumpf, dann liegt der Umkreismittelpunkt außerhalb des Dreiecks.

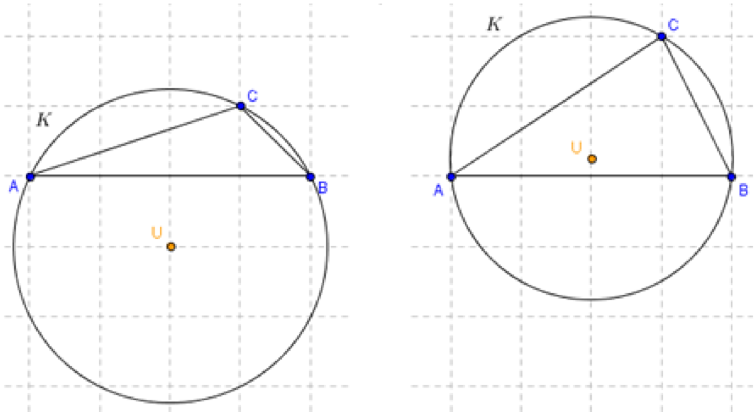


Abbildung 113: Die Lage des Umkreismittelpunktes hängt davon ab, ob das Dreieck spitz oder stumpf ist.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Der Umkreismittelpunkt U hat von jedem Eckpunkt des Dreiecks den gleichen Abstand. Diese Abstandsbedingungen lassen sich mit einem RGS direkt umsetzen:

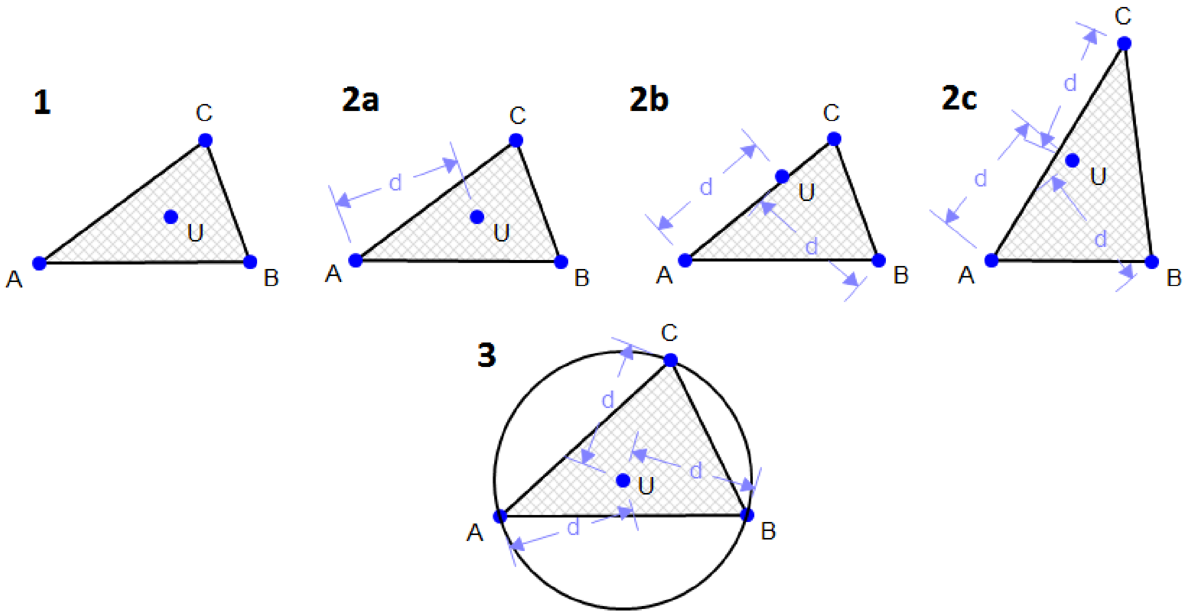


Abbildung 114: Der Mittelpunkt *U* des Umkreises wird durch drei Abstandsbedingungen realisiert.

Wir formulieren die Bildfolge als Kompositionsprotokoll:

1. Erzeuge die Punkte A,B,C,U und die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$.
2. Realisiere die Abstandsbedingungen $|\overline{UA}| = d$, $|\overline{UB}| = d$, $|\overline{UC}| = d$.
3. Erzeuge den Kreis K mit Mittelpunkt U durch den Punkt A (oder B oder C).

Die zwangsläufige Verwendung der Formvariablen d hat für die Exploration im Zugmodus Konsequenzen: Nach Umsetzung der ersten Bedingung lässt sich der Punkt U um einen Kreis mit Mittelpunkt A und (variablem) Radius d bewegen. Das ändert sich, nachdem die zweite Bedingung realisiert ist: Dann lässt sich U auf der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{AB}$ bewegen.

Die oben erwähnte zweite Möglichkeit der Umsetzung mit einem DGS ist auch mit RGS denkbar. Ein Proband erzeugt zu Beginn ein Dreieck ABC und einen Kreis K und fordert dann, dass der Kreis durch die drei Eckpunkte verlaufen soll. Es gibt hier einen Unterschied, ob mit DGS oder RGS exploriert wird: Mit einem DGS kann im Zugmodus nur die Lage der freien Punkte verändert werden. Das bedeutet, dass man mit einem DGS die Lage von U nicht durch Zug an U verändern kann, sondern nur mittelbar, indem man an den drei Eckpunkten passend zieht. Mit einem RGS hingegen kann die Lage des Punktes U direkt verändert werden.

4.3.6 Aufgabe „Umkreis Vierecke"

Während der Interviews ist bei der Bearbeitung der Eigenmann-Aufgabe Nr. 51 (II) in Abschnitt 4.3.4 spontan die folgende Frage aufgetaucht:

1. Aufgabenstellung

Welche Vierecke besitzen einen Umkreis?

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Wie bei der Eigenmann-Aufgabe 51 (II) ist es möglich, dass ein Proband ein allgemeines Viereck erzeugt und dann prüft, wann sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt schneiden. Denkbar ist außerdem der Ansatz, dass Probanden rückwärts arbeiten so wie in Abbildung 37 auf S. 44. Dort beginnt man mit dem späteren Umkreis, setzt vier Punkte auf die Kreislinie und verbindet diese zu einem Sehnenviereck.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Ein Proband erzeugt ein Viereck $ABCD$, einen Kreismittelpunkt M und einen Kreis K um M durch einen Punkt P. Dann setzt er die Abstandsbedingungen um, so dass der Punkt M von allen vier Eckpunkten den gleichen Abstand a besitzt:

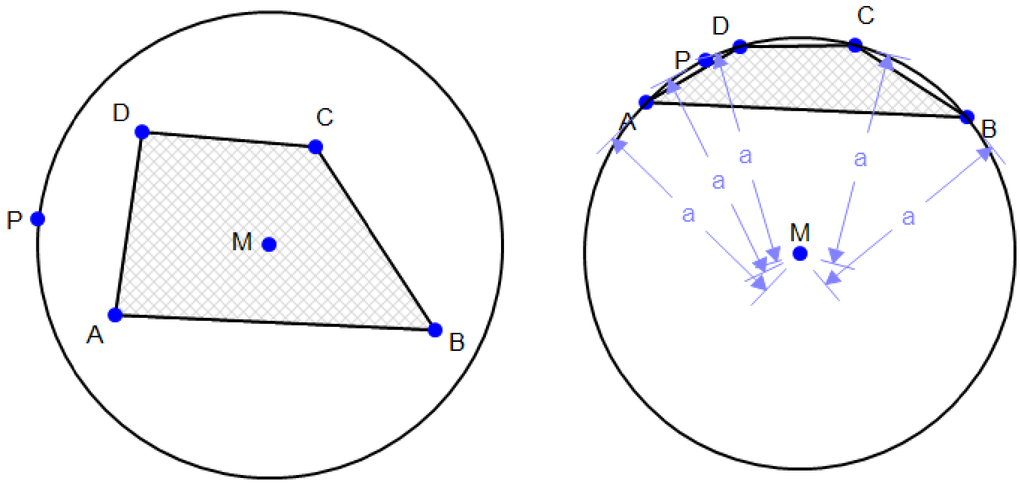


Abbildung 115: Viereck und Kreis bevor und nachdem Abstandsbedingungen gesetzt wurden.

In der Abbildung sehen wir rechts ein typisches Phänomen von RGS: Neue Konfigurationen, die durch Übermittlung von Bedingungen entstehen, können auf einen Benutzer willkürlich und „verzerrt" wirken.

4.3.7 Aufgabe „Abrutschende Leiter“

1. Aufgabenstellung

An einer Wand stehe eine Leiter mit fester Länge, zum Beispiel 5 Längeneinheiten. Die Leiter rutscht ab. Auf welcher Kurve bewegt sich dabei der Mittelpunkt der Leiter? Können Sie Ihre Antwort begründen?

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Es ist zweckmäßig, den Boden als positive x-Achse und die Wand als positive y-Achse zu wählen:

1. Setze mit dem Werkzeug *Punkt auf Linie* einen Punkt A auf die positive y-Achse.
2. Schlage einen Kreis K um A mit Radius 5.
3. Der Kreis K schneidet die positive x-Achse im Punkt B.
4. Konstruiere die Strecke $\overline{AB}$ und ihren Mittelpunkt M.

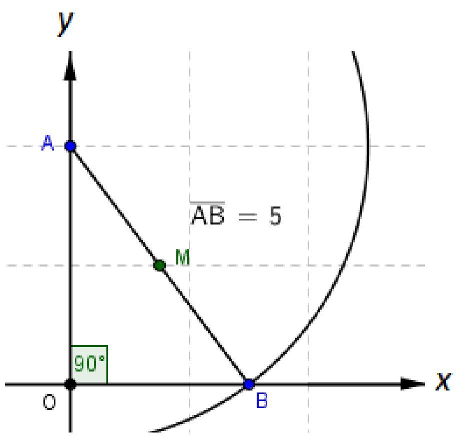


Abbildung 116: Die Konfiguration der abrutschenden Leiter umgesetzt mit einem DGS

DynaGeo bietet die relationalen Werkzeuge *Strecke fester Länge* und *Punkt an Linie binden*. Alternativ kombiniert ein Proband diese beiden Werkzeuge, um zur gewünschten Konfiguration zu gelangen. Ist die Konfiguration umgesetzt, so kann ein Benutzer die Leiter im Zugmodus abrutschen lassen, indem er an dem Punkt A oder B zieht:

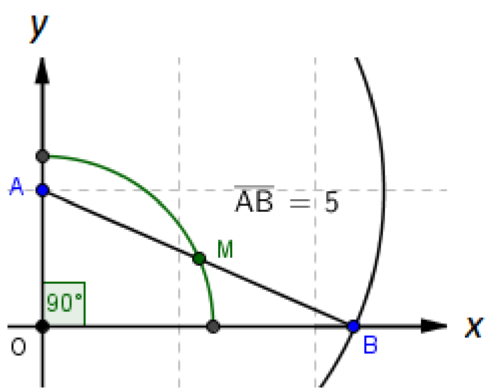


Abbildung 117: Ortslinie des Mittelpunktes *M* der Leiter

Augenscheinlich handelt es sich bei der Ortslinie vermutlich um einen Viertelkreis. Mit Dyna-Geo kann man nun die Ortslinie in eine Standardkurve verwandeln lassen. Das DGS liefert als Ergebnis in der Tat einen (Viertel)kreis um den Ursprung mit dem Radius der halben Leiterlänge.

Begründung des Ergebnisses

Im ersten Grenzfall, dass die Leiter an der Wand lehnt, hat M die Koordinaten $(0|2{,}5)$. Im zweiten Grenzfall, dass die Leiter der vollen Länge nach auf dem Boden liegt, hat M die Koordinaten $(2{,}5|0)$. Wir ergänzen die Konfiguration von Abbildung 117 durch geeignete Hilfslinien zu einem Rechteck:

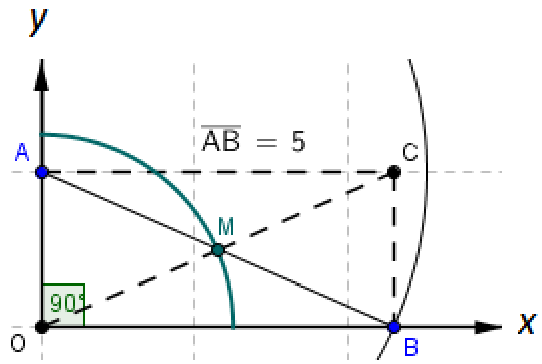


Abbildung 118: Wir ergänzen die Konfiguration zu einem Rechteck $OBCA$.

Nach Voraussetzung ist M der Mittelpunkt der Leiter, also ist M auch der Mittelpunkt des Rechtecks, die Diagonalen des Rechtecks schneiden sich im Punkt M und halbieren sich gegenseitig. Daraus folgt: Die Strecke $\overline{OM}$ ist genau so lang wie die Strecke $\overline{MB}$. Letztere besitzt konstante Länge, der Abstand $|\overline{OM}|$ ist somit auch konstant, das heißt M bewegt sich auf einem (Viertel)kreis um den Ursprung O. Der Radius des Kreises beträgt dabei gerade die halbe Leiterlänge.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Mit einem RGS lässt sich die Konfiguration mit folgender Komposition umsetzen:

1. Erzeuge zwei Punkte O und X und setze ihre Koordinaten auf
2. Setze die Koordinaten fest: $O(0|0)$ und $X(6|0)$.
3. Erzeuge oberhalb der Strecke $\overline{OX}$ eine Halbgerade w durch O.
4. Setze die Halbgerade w orthogonal zur Strecke $\overline{OX}$.
5. Erzeuge auf w einen Punkt A.
6. Erzeuge einen Kreis K um A, der die Strecke $\overline{OX}$ schneidet.
7. B ist der Schnittpunkt von K und $\overline{OX}$.
8. Erzeuge den Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$.

Es empfehlen sich Bedingungen, die implizieren, dass der Boden und die Wand fixiert sind, damit die Konfiguration im Zugmodus für eine Exploration hinreichend „ruhig“ ist. Diese

Bedingungen lauten in obiger Kompositionsbeschreibung, dass die Punkte O und B feste Koordinaten besitzen:

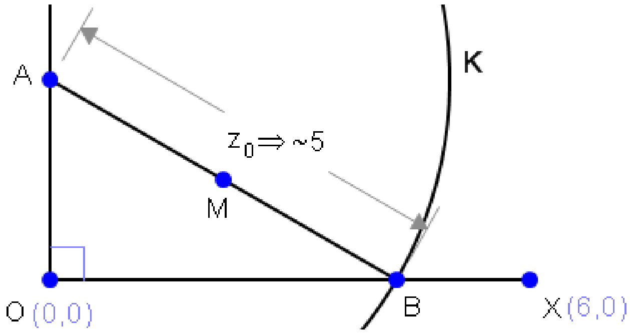


Abbildung 119: Konfiguration der abrutschenden Leiter umgesetzt mit Geometry Expressions

Die x-Koordinate des Punktes B sollte etwas größer sein als die Länge der Leiter, also etwas größer als 5 Längeneinheiten, damit der Grenzfall, dass die Leiter auf dem Boden liegt, durch das RGS abgebildet werden kann. Der Abstand des Punktes A vom Ursprung O sollte kleiner als die Länge der Leiter gewählt werden, damit der Kreis K die Strecke $\overline{OX}$ schneidet.

4.3.8 Aufgabe „Ortslinie“

1. Aufgabenstellung

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$. Wo liegen alle Punkte, die von B doppelt so weit entfernt sind wie von A? Beschreiben Sie die Kurve, die durch die Punkte mit dieser Eigenschaft definiert wird.

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Ein Punkt C der gesuchten Ortslinie soll vom Punkt B doppelt so weit entfernt sein wie vom Punkt A. Ein Lösungsansatz besteht darin, die möglichen Abstandswerte zu *variieren*.

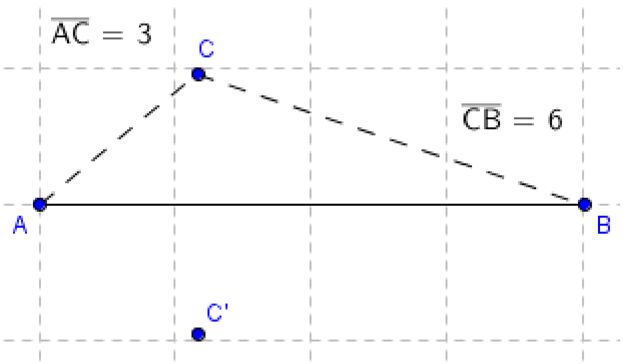


Abbildung 120: Die beiden Punkte C und C' sind von B doppelt so weit entfernt wie von A.

Das Konzept des Schiebereglers wurde im Einführungskurs zwar nicht explizit behandelt, aber Probanden können einzelne Punkte mit der geforderten Eigenschaft als Schnittpunkte von Abstandskreisen konstruieren, um zu einer Vermutung zu gelangen:

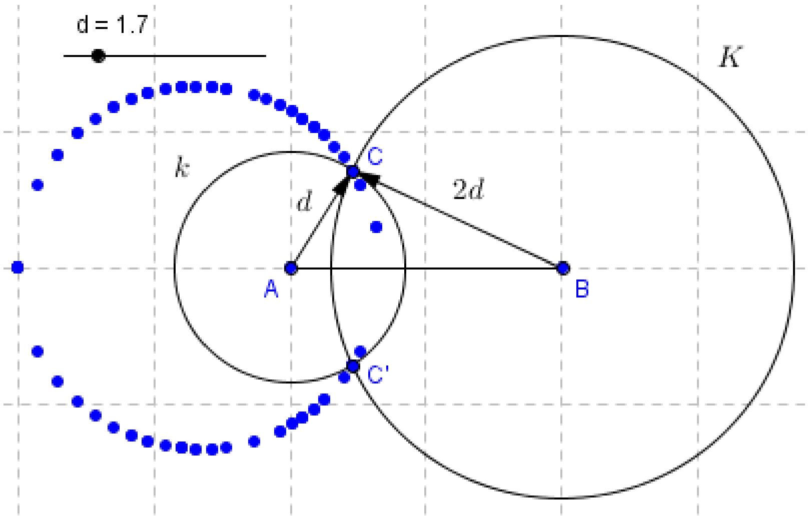


Abbildung 121: Die gesuchte Ortslinie entsteht durch Konstruktion einzelner Punkte.

Augenscheinlich handelt es sich bei der Ortslinie um einen Kreis mit einem Mittelpunkt, der auf der Geraden $\overline{AB}$ liegt. Es stellt sich daher die Frage nach einer Begründung dieser Vermutung. Wir ergänzen in Abbildung 120 Hilfslinien:

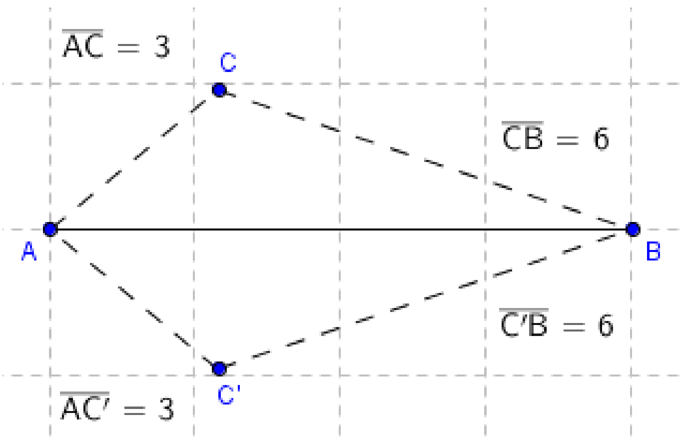


Abbildung 122: Die Ortslinie ist symmetrisch zur Strecke $\overline{AB}$.

Mit einem Punkt C ist auch der Spiegelpunkt C' bzgl. $\overline{AB}$ ein Punkt der Ortslinie. Daher verläuft die Ortslinie symmetrisch zur Strecke $\overline{AB}$. Weiter existiert auf der Strecke $\overline{AB}$ genau ein Punkt der Ortslinie, dieser drittelt die Strecke $\overline{AB}$:

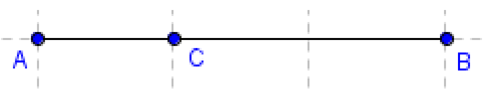


Abbildung 123: Der Punkt C gehört zur Ortslinie und drittelt die Strecke $\overline{AB}$.

Der Punkt C in Abbildung 123 liegt auf der Ortslinie, denn er ist von B doppelt so weit entfernt wie von A. Rechts neben C kann kein Punkt der Ortslinie liegen, denn in diesem Bereich ist die Abstandsbedingung nicht erfüllt. Der Spiegelpunkt B' von B bzgl. A auf der Halbgeraden $\overline{AB}$ liegt ebenfalls auf der Ortslinie, denn es gilt die Abstandsbedingung:

$$2 \cdot Abstand(B', A) = Abstand(B', B).$$

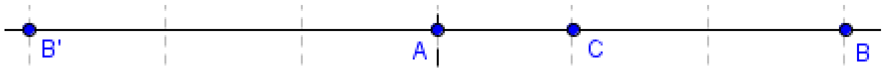


Abbildung 124: Der Spiegelpunkt B' von B bzgl A liegt auf der Ortslinie.

Links von B' kann kein Punkt der Ortslinie liegen. Weiter ergibt sich der Mittelpunkt M des vermuteten Kreises als Mittelpunkt der Strecke $\overline{B'C}$:

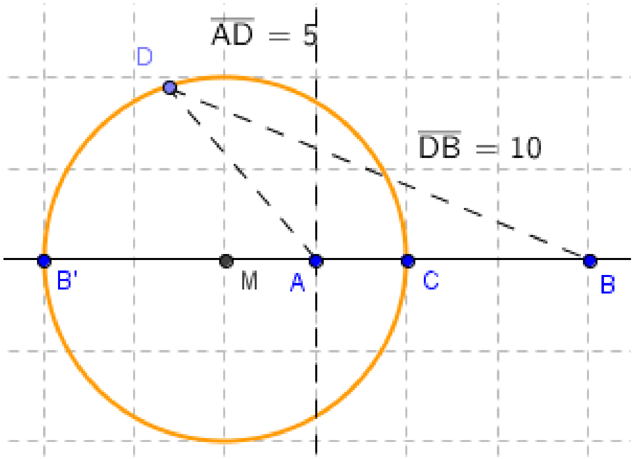


Abbildung 125: Die gesuchte Ortslinie ist ein Kreis mit Mittelpunkt M durch den Punkt C.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Es ist auch hier praktisch sinnvoll, die Koordinaten von A und B konstant zu wählen, damit die Strecke $\overline{AB}$ fixiert ist und die Konfiguration im Zugmodus dementsprechend ruhig bleibt:

1. Erzeuge die Punkte A,B und C.
2. Fixiere die Koordinaten $A(0|0)$ und $B(3|0)$.
3. Erzeuge die Strecke $\overline{AB}$.
4. Übermittle die Abstandsbedingung $Abstand(A, C) = d$
5. Übermittle die Abstandsbedingung $Abstand(B, C) = 2d$.

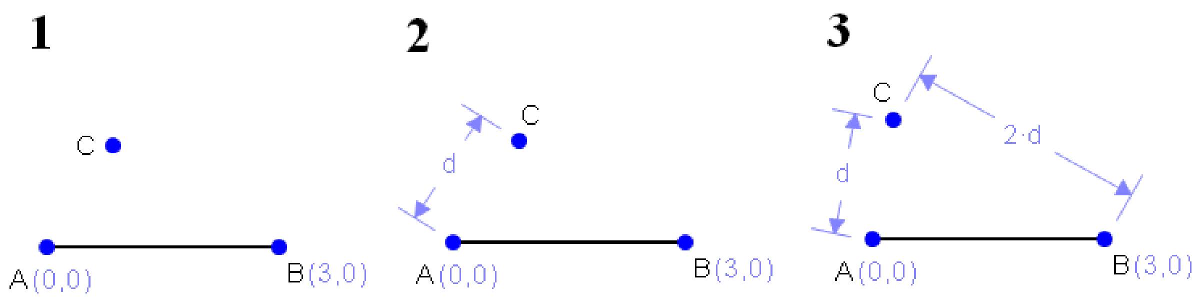


Abbildung 126: Der Abstand zwischen B und C ist doppelt so groß wie der Abstand von A und C.

Nun kann man die Abstandsvariable d mit dem Werkzeug *Trace* variieren und erhält eine Farbspur des Punktes C:

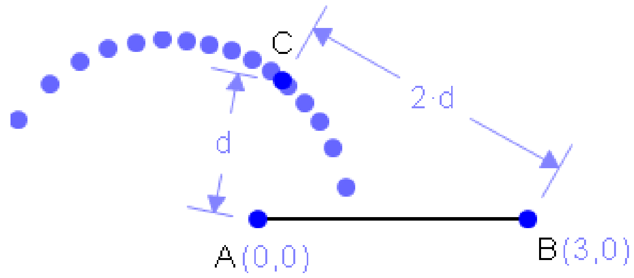


Abbildung 127: Die Spur des Punktes C in Geometry Expressions.

Geometry Expressions liefert hier nur den oberen Teil der Ortslinie. Ein Proband müsste also selbständig auf die Idee kommen, dass die Ortslinie symmetrisch zur Strecke $\overline{AB}$ ist bzw. er müsste einen weiteren Punkt C' erzeugen und auch für diesen die beiden Abstandsbedingungen realisieren.

4.3.9 Aufgabe „Gemeinsame Tangenten zweier Kreise"

1. Aufgabenstellung

Wie viele *gemeinsame* Tangenten können zwei Kreise besitzen?

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Man gelangt mit einer Skizze schnell zu der Vermutung, dass im Falle nicht identischer Kreise zwei innere und zwei äußere gemeinsame Tangenten existieren.

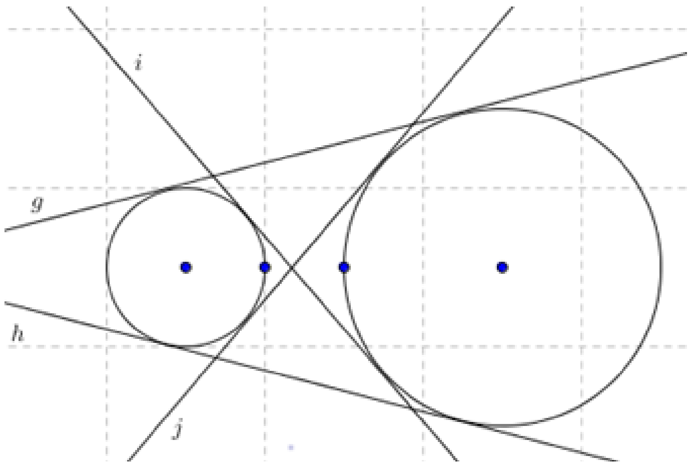


Abbildung 128: Zu zwei disjunkten Kreisen existieren vier gemeinsame Tangenten.

Die Aufgabe, diese Konfiguration mit einem DGS zu konstruieren, ist bei der ersten Begegnung vergleichsweise schwierig. Zur Konstruktion einer Tangente von einem Punkt an **einen** Kreis benötigt man den Satz des Thales. Dieser wurde im Vorkurs DGS behandelt. Es ist hier zweckmäßig, mit einer Skizze wie in Abbildung 129 zu beginnen, die die Konfiguration gelöst darstellt, das heißt, man arbeitet rückwärts:

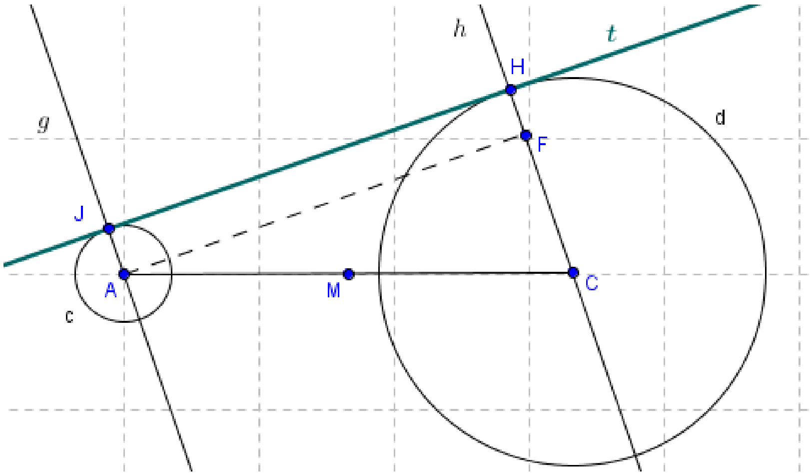


Abbildung 129: Die gesuchte Konfiguration mit einer gemeinsamen Tangente t

Der Figur entnehmen ihr Eigenschaften, die für einen möglichen Lösungsweg hilfreich sein können. Dazu ergänzen wir die zur Tangente t parallele Hilfslinie $\overline{AF}$ und finden folgende Beziehungen:

1. $\overline{AJ}$ steht als Radius des ersten Kreises senkrecht zur Tangente t.
2. Dann ist das Viereck $AFHJ$ ein Rechteck und somit gilt $|\overline{AJ}| = |\overline{FH}|$.
3. Der Radius R des rechten Kreises lässt sich aufspalten zu $R = |\overline{CF}| + |\overline{FH}|$.
4. $\overline{AF}$ steht senkrecht zu $\overline{FC}$, mit anderen Worten: Das Dreieck ACF ist rechtwinklig.

Damit ist die Basis für einen Lösungszugriff gelegt: Ist der Punkt F bekannt, so ergibt sich daraus die Lage von H und damit J und schließlich die Tangente t. Das Dreieck ACF besitzt bei F einen rechten Winkel, die Punkte A,C,M sind bekannt und mit dem Thales-Kreis können rechtwinklige Dreiecke erzeugt werden:

1. Schlage den Thales-Kreis e um M durch A.
2. Schlage einen Kreis f um C mit dem Radius $R - r$.
3. F ist der Schnittpunkt der beiden Kreise e und f.

Dann ist das Dreieck ACF wie gewünscht rechtwinklig und wir setzen die Konstruktion fort:

4. H ist der Schnittpunkt des zweiten Kreises und der Verlängerung h der Strecke $\overline{CF}$.
5. g ist die Parallele von h durch A.
6. J ist der Schnittpunkt des Kreises c mit g.
7. t ist die Gerade durch J und H.

Durch diese Konstruktionsbeschreibung erhalten wir eine äußere gemeinsame Tangente t wie in Abbildung 129.

Arbeitet man mit einem DGS rückwärts, das heißt, vertauscht man die gesuchten mit den gegebenen Objekten, so kann man zuerst eine Konfiguration erstellen, um damit zu explorieren, wie man das Ausgangsproblem löst. Hier beginnt man mit einem Kreis k und einer dazu variablen Tangente t und konstruiert dazu einen zweiten Kreis K für den t ebenfalls eine Tangente ist. Entscheidend ist bei dieser Umsetzung der Konfiguration die Verfügbarkeit des relationalen Werkzeugs *Punkt auf Linie*:

1. Konstruiere einen Kreis k um A durch B.
2. Setze einen Punkt C auf die Kreislinie k.
3. Konstruiere die Strecke $\overline{AC}$.
4. Konstruiere die Senkrechte t zu $\overline{AC}$ durch C.
5. Setze einen Punkt D auf t.
6. Konstruiere eine Senkrechte h zu t durch D.
7. Setze einen Punkt E auf h.
8. Konstruiere den Kreis um E durch D.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Mit einem RGS lässt sich eine gemeinsame Tangente t zügig umsetzen:

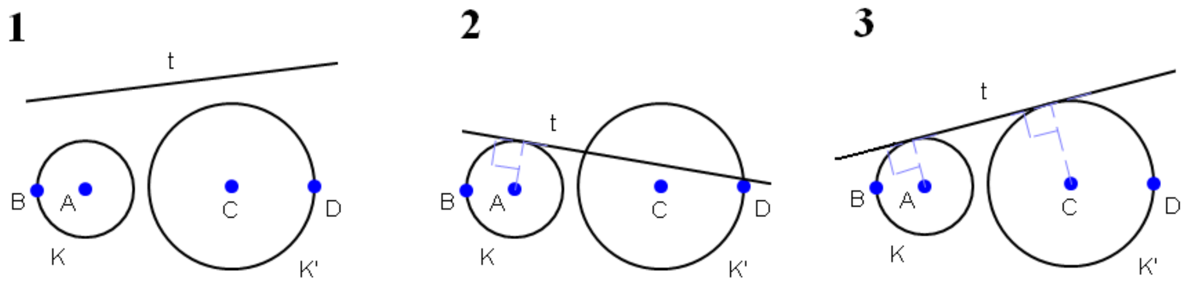


Abbildung 130: Eine gemeinsame Tangente zweier Kreise entsteht durch Tangentialbedingungen

1. Erzeuge zwei Kreise K und K' und eine Gerade t.
2. Realisiere die Bedingung: K und t liegen tangential
3. Realisiere die Bedingung: K' und t liegen tangential.

Abhängig von der Ausgangslage der Objekte kann es bei der Übermittlung der Tangentialbedingungen passieren, dass Geometry Expressions die Gerade t **zwischen** die beiden Kreise setzt. In diesem Fall wird eine der beiden **inneren** Tangenten umgesetzt:

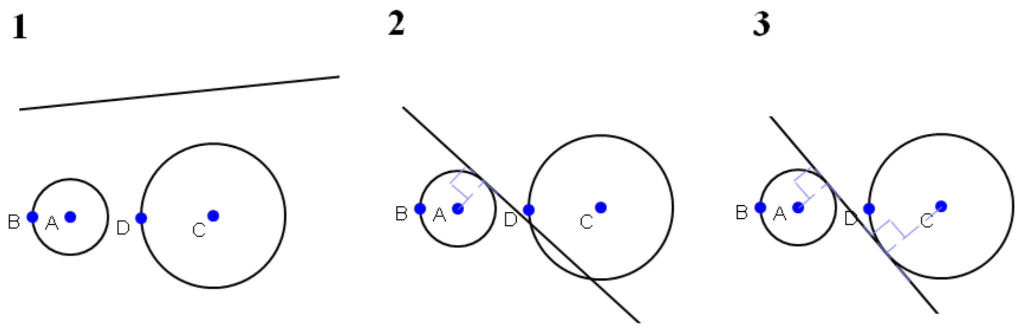


Abbildung 131: Eine innere gemeinsame Tangente der zwei Kreise entsteht.

Bei Geometry Expressions ist es dann im Zugmodus möglich, dass die Gerade t zwischen den Lösungen wechselt, wenn man sie bewegt:

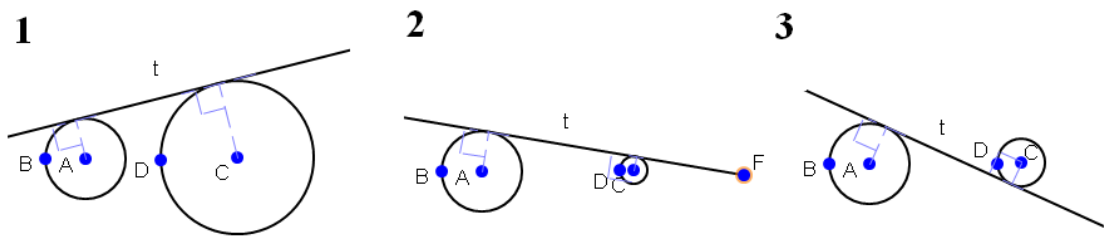


Abbildung 132: Eine äußere Tangente wird im Zugmodus zu einer inneren gemeinsamen Tangente.

Zur vollständigen Umsetzung der Konfiguration muss ein Benutzer vermuten, dass insgesamt vier solche Tangenten existieren.

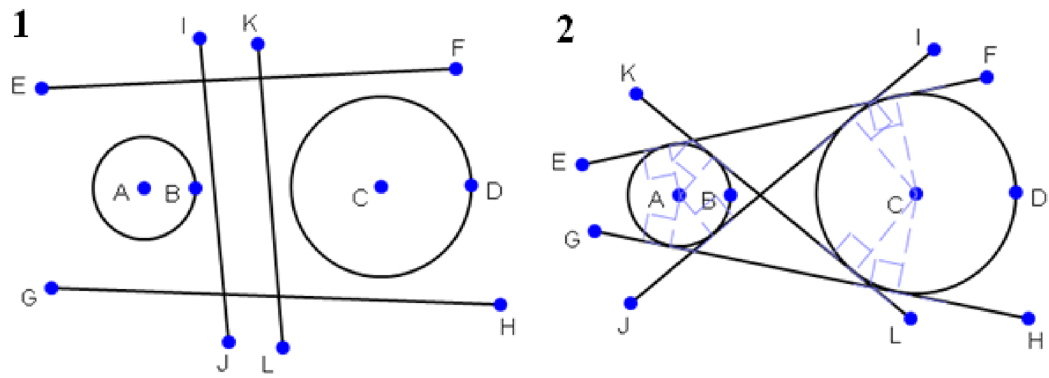


Abbildung 133: Vier Strecken werden durch Tangentialbedingungen zu vier gemeinsamen Tangenten.

Bei der Umsetzung mit Geometry Expressions wie in Abbildung 133 kann es gelegentlich passieren, dass eine Strecke, die als innere Tangente eingeplant wird durch das RGS zu einer äußeren Tangente wird.

4.3.10 Aufgabe „Eigenmann Nr. 107“

1. Aufgabenstellung

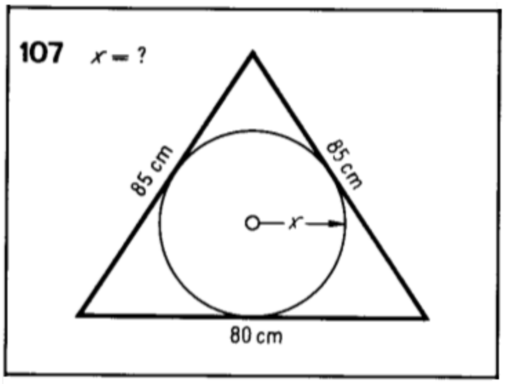


Abbildung 134: Eigenmann-Aufgabe Nr. 107

Vorbemerkung: Die Konfiguration besteht aus einem Dreieck und dem zugehörigen Inkreis. Alle Seitenlängen des Dreiecks sind bekannt. Gesucht ist der Radius des Inkreises. Wir führen für die weitere Diskussion Bezeichnungen und Hilfslinien ein.

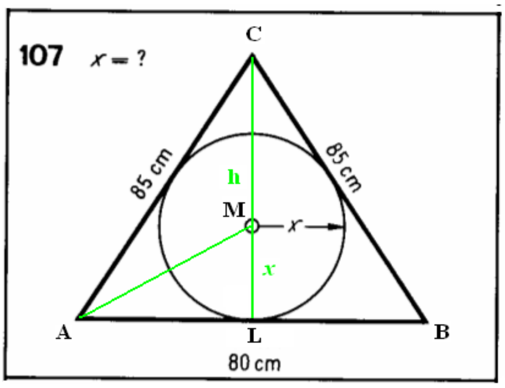


Abbildung 135: Eigenmann-Aufgabe Nr. 107 mit eingeführten Bezeichnungen und Hilfslinien

Zur rechnerischen Behandlung der Aufgabe kann ein Proband mit dem Satz des Pythagoras im Dreieck ACL die Größe der Höhe $h = |\overline{LC}|$ bestimmen:

$$40^2 + h^2 = 8{,}5^2$$
$$h = 75cm.$$

Anschließend bietet es sich an, den Winkel α mittels des Tangens zu berechnen:

$$\tan(\alpha) = {}^{h}/_{40}$$
$$\tan(\alpha) = {}^{75}/_{40}$$
$$\alpha \approx 61{,}93°.$$

Mit diesem Wert kann nun der Radius x im Dreieck AML ermittelt werden:

$$\tan\left({}^{\propto}/_{2}\right) = {}^{x}/_{40}$$

$$x = 40\tan(\propto/_2)$$

$$x = 24cm.$$

Alternativ lässt sich der Zahlenwert für den Radius bestimmen, wenn man nach Kenntnis der Höhe h den Zusammenhang

$$\rho = \frac{2A}{U}$$

für den Dreiecksinkreis ρ benutzt.

2. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem DGS und Exploration

Ein mögliches Konstruktionsprotokoll lautet mit Verwendung von mentalen Großschritten:

1. Erstelle das Dreieck ABC durch die Konstruktion SSS.
2. Konstruiere den Mittelpunkt M als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierenden.
3. L ist der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$.
4. Konstruiere den Kreis K mit Mittelpunkt M durch den Punkt L.

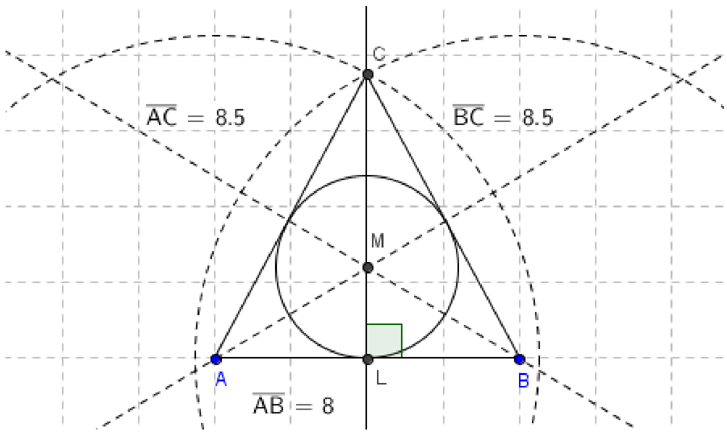


Abbildung 136: Mögliche Umsetzung der Konstruktion mit einem DGS

Danach liegt die Konfiguration vor und der gesuchte Inkreisradius x ergibt sich als Abstand der Strecke $\overline{ML}$. DynaGeo gibt aus: $x = 2{,}4cm.$ Mit dem veränderten Maßstab erhält ein Proband somit $24cm$ als Lösung.

3. Mögliche Umsetzungen der Konfiguration mit einem RGS und Exploration

Nach der Softwareschulung sollten Probanden in der Lage sein, das folgende Kompositionsprotokoll zu formulieren und umzusetzen:

1. Erzeuge ein Dreieck ABC, zwei Punkte M und P und einen Kreis K um M durch P.
2. Übermittle die drei Bedingungen für die Streckenlängen.
3. Übermittle die Bedingungen, dass der Kreis K die drei Dreiecksseiten berührt.
4. Konstruiere einen Berührpunkt Q des Kreises K mit einer Dreiecksseite.

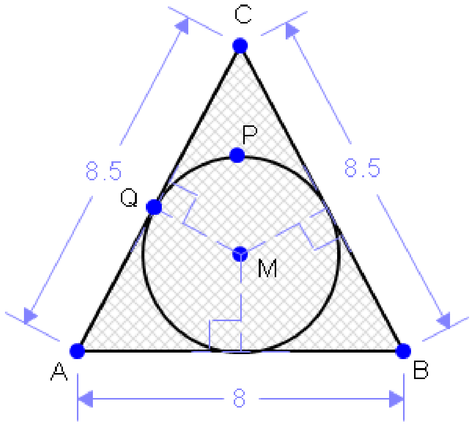


Abbildung 137: Mögliche Umsetzung der Konfiguration mit Geometry Expressions

Dann ist die Konfiguration umgesetzt und der gesuchte Inkreisradius ergibt sich als Abstand des Mittelpunktes M zum erzeugten Berührpunkt Q. Geometry Expressions gibt das dimensionslose Ergebnis 2.4 aus. Mit dem gewählten Maßstab ergibt sich also $24cm$.

Bei der Umsetzung kann es vorkommen, dass nicht der Inkreis, sondern ein Ankreis realisiert wird:

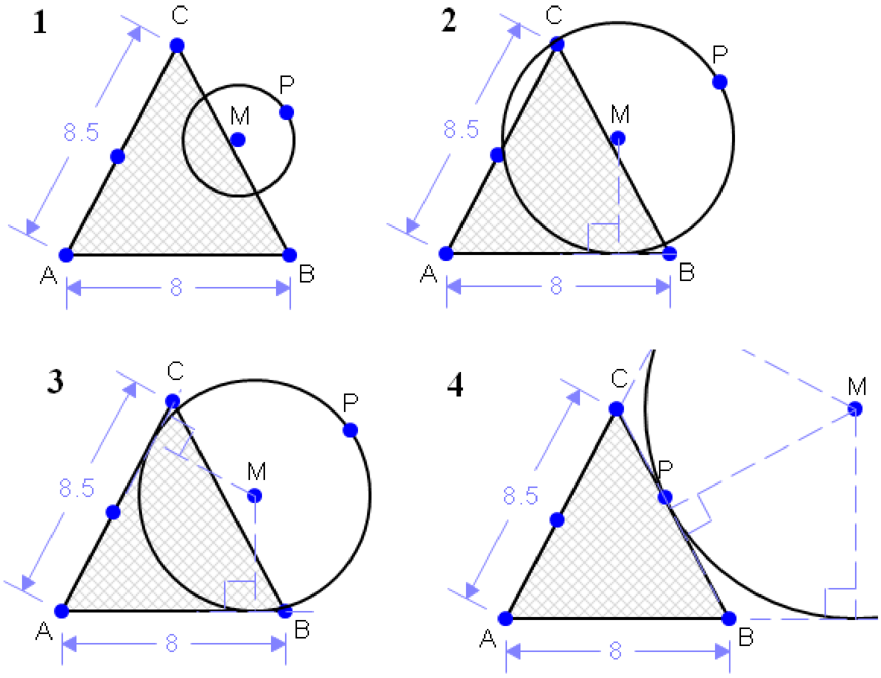


Abbildung 138: Hier wird nicht der Inkreis, sondern ein Ankreis realisiert.

Dieser Fall tritt dann auf, wenn der Mittelpunkt M des Ausgangskreises außerhalb des Dreiecks liegt.

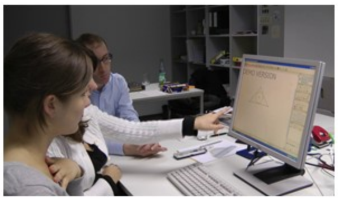
4.4 Transkription ausgewählter Interviewpassagen

Das aus den Interviews generierte Videomaterial hat einen Umfang von ca. 14 Stunden und wurde über von mehrere Wochen hinweg gesichtet. Aus dem Umfang des Rohmaterials ergibt sich zwangsläufig, dass Teile davon ausgewählt werden müssen. Die Begründung für die Auswahl wurde bereits bei der Vorstellung des Auswertungsverfahrens auf S. 91 erläutert. Die Aufgaben, die in den folgenden transkribierten Passagen vorkommen, sind: Quadrat, Blumenmuster, Eigenmann-Aufgabe Nr. 78, Umkreismittelpunkt und Eigenmann-Aufgabe Nr. 51 (II). Für die Interviews ergab sich tendenziell der folgende Ablauf:

1. Lesen der Aufgabenstellung
2. Gegebenenfalls Ad hoc-Antwort auf die Frage der Aufgabe
3. Auswahl der Software
4. Umsetzung und Exploration der Konfiguration
5. Lösungsversuche („Zugriff“)

Die Transkription unterteilt sich spaltenweise in die Nummer und den Zeitraum eines Abschnitts, die verbalen Äußerungen, die Aktivitäten und gegebenenfalls den Momentaufnahmen, vgl. [Schreiber10, S. 73]. Es werden nicht fortlaufend solche Momentaufnahmen abgebildet, da stellenweise nur mündliche Kommunikation stattfindet.

Tabelle 14: Transkriptionslegende der Interviews

Nummer und Zeit	**Verbale Äußerungen**	**Aktivitäten**	**Bildschirmausschnitt**
#1 **2:32 - 3:20**	Sonja: Dann müssen wir jetzt kucken, dass der Kreis auf C, B und A liegt. (...) Wie kriegen wir das hin/ Das hatten wir doch schon mal gemacht.	**Sonja zeigt dabei mit einem Finger auf den Bildschirm.** **Anne führt die Maus-Aktionen durch.**	

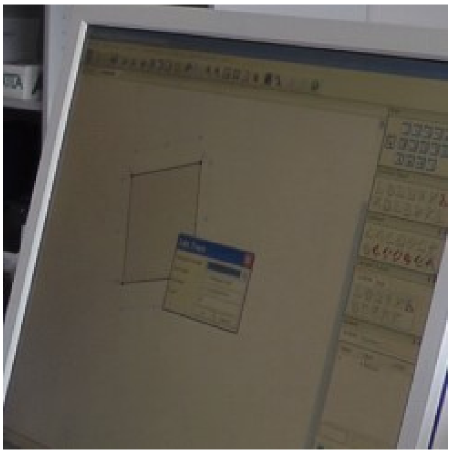
Die Passagen sind in der ersten Spalte über die Interviews hinweg fortlaufend durchnummeriert mit Anfangs- und Endzeit im Videomaterial. Die Namen der Probanden wurden geändert, um Anonymität zu gewährleisten.

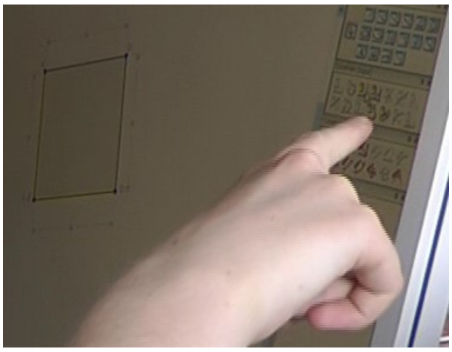
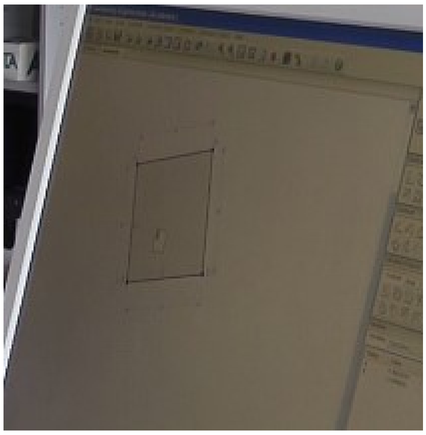
Paralinguistische Sonderzeichen

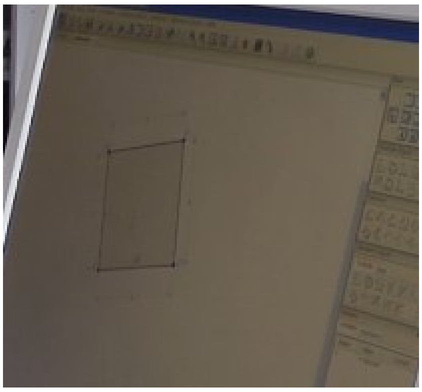
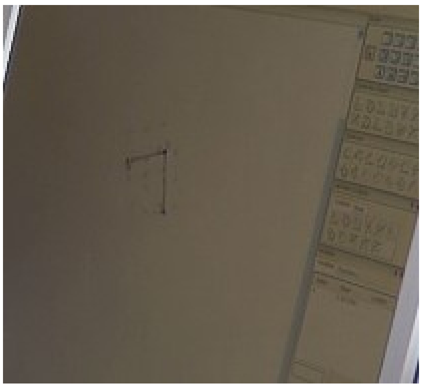
.	kurzes Absetzen innerhalb einer Äußerung
[-]	Pause von max. 3 Sekunden
\	Senken der Stimme
/	Heben der Stimme
fett	fett für Betonung
ach s o o	auseinandergezogen für gedehnte Aussprache

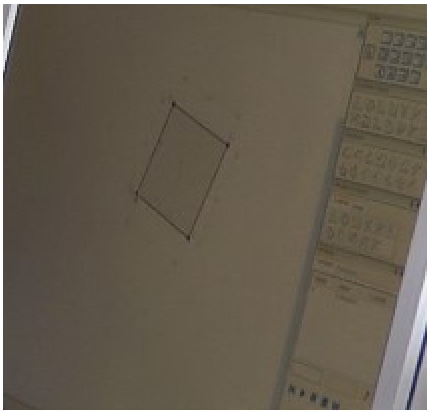
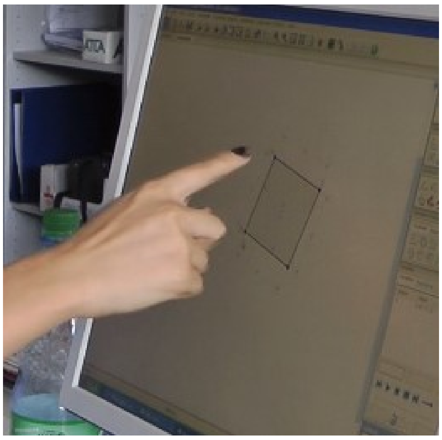
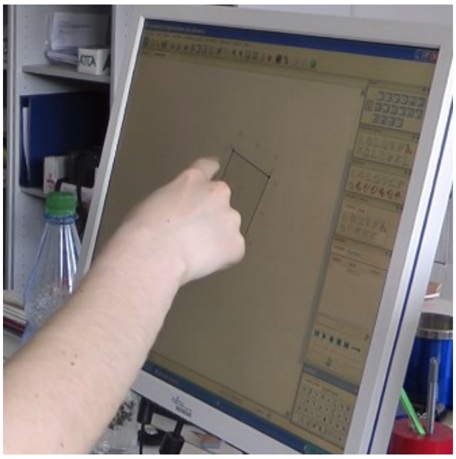
4.4.1 Passage Nr. 1 Beatrice und Selina, Aufgabe Quadrat

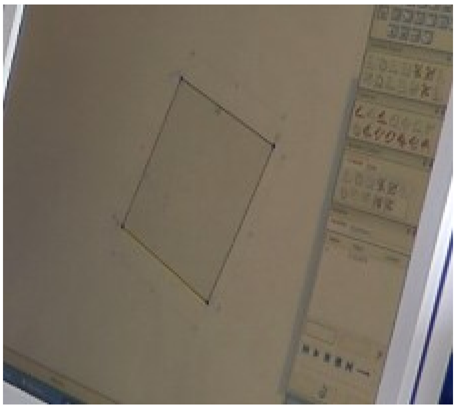
Nummer und Zeit	Verbale Äußerungen	Aktivitäten	Bildschirmausschnitt
#1 **0:00 – 1:09**	*Interviewer*: Erste Aufgabe *Selina*: Ist ein Viereck mit vier gleichen langen Seiten zwangsläufig ein Quadrat [/] *Selina*: [unverständlich]. Okay das sollen wir jetzt erst mal mündlich beantworten [/] *Interviewer*: Ja. *Selina:* Okay. Vier gleich langen Seiten. [-] Alle Seiten *Beatrice*: Ja. Ein Quadrat hat ja immer vier gleich lange Seiten. *Selina*: Ich bin auch der Meinung. *Beatrice*: Ansonsten wär es ja *Selina*: Wenn die Strecke immer a ist muss es ein Quadrat sein [-] sonst. *Beatrice*: Richtig. Ja *Interviewer*: Gut würden Sie das mit ‘ner Software veranschaulichen [/]. *Selina*: Obwohl [-] wenn [-] ich ein [-] Parallelogramm hab könnte doch auch, wenn man’s so [-] ist dann auch ein [/] [-] Nein ist doch kein Quadrat. Oder müsste es nicht rechtwinklig sein [/]	**Selina liest Aufgabenstellung vor.** **Selina bewegt ihre Hände.**	 

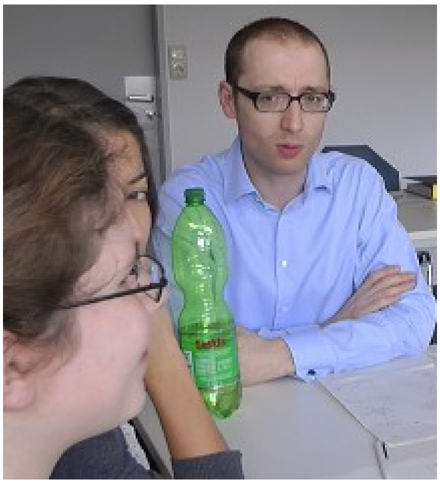
	Beatrice:[unverständlich] Ne stimmt. Neh hast Recht sonst würde ja da stehen, es müsste immer 'nen rechten Winkel haben. *Selina*: Genau wenn es keinen rechten Winkel hat ist es ja kein [-] Quadrat mehr, dann ist es ein Parallelogramm oder [/] *Beatrice*: Genau. [-] Ne stimmt. Stimmt. Dann hast Du Recht. Dann ist es nicht zwangsläufig 'n Quadrat.		
#2 **3:36 – 8:12**	*Selina*: Wenn wir jetzt noch *Interviewer*: Und wie können Sie daraus ein Quadrat machen [/] *Selina*: Ähm mit dem Winkel festlegen. [-] Geht das hier [/] Ja [un-verständlich] *Selina*: rechter Winkel kann man hier irgendwo Winkel da *Interviewer*: Da geben Sie 'ne Spur oder wollen Sie eine Spur haben [/] *Selina*: Das ist eigentlich *Interviewer*: Winkel also Sie können ja auch sa-gen, dass die Strecken senkrecht aufeinander stehen sollen. *Selina*: Ah okay. *Interviewer*: Ja [/] Das läuft aufs Gleiche hinaus. *Selina*: Ja Stimmt. *Interviewer*: Haben Sie beide markiert [/]	**Das Dialogfenster für *Trace* öffnet sich.**	

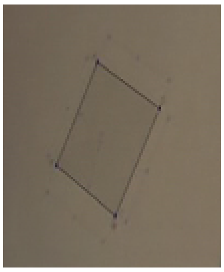
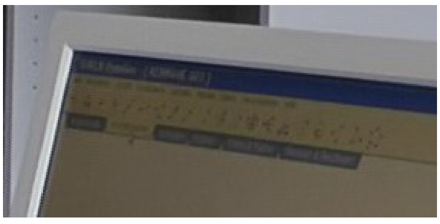
	Selina: Mh.		
	Beatrice: [unverständlich] was		
	Selina: Das da		
	Beatrice: Ne ähm das andere.	**Beatrice zeigt auf den Monitor.**	
	[-]		
	Interviewer: Wo müssen Sie jetzt schauen [/] Bei welcher Werkzeugpalette [/]		
	Beatrice: Constrain [/]		
	Selina: Construct.		
	Beatrice: Okay oder [/]		
	Interviewer: Sie sind unterschiedlicher Meinung. Dann diskutieren Sie das bitte.		
	Selina: Konstruieren oder constraint heißt [-] [unverständlich]		
	Beatrice: Vereinf Einfügen [unverständlich]		
	Selina: Konstruieren und einfügen wir sollen ja eine Bedingung festlegen [unverständlich] konstruieren oder nicht [/]		
	Beatrice: Ja da hast Du		
	Selina: Oder [/]		
	Beatrice: Ja probieren wir es einfach mal aus.		
	Selina: [unverständlich] Wenn wir hier 90 Grad eingeben. Geht das [/] Ist das 90 Grad [/]	**Probandin gibt im Dialogfenster *Angle* einen Winkel ein.**	
	Interviewer: Sie müssen 's im Bogenmaß eingeben. Probieren Sie 's mal aus.		

	Selina: Im Bogenmaß. *Interviewer*: Ja Sie wollen ja jetzt ‘nen Winkel eingeben oder [/]. *Selina*: Mhe. [-] Wie geb‘ ich das denn ein. Weißt Du das [/] *Beatrice*: Das ist glaub ich dann Pi äh halbe. *Selina*: Ach so. *Interviewer*: Ja tippen Sie mal ein Pi, Peee Ihhh *Selina*: ach so. *Interviewer*: durch 2 [-] *Interviewer*: Mit Slash. *Selina*: Ach so okay.	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	
	Interviewer: Macht er das [/] *Selina*: Ja. *Beatrice*: Ja. *Interviewer*: Und [/] Ist es jetzt ‘n Quadrat [/]. *Selina*: Glaub schon. Oder [/] [-]		
	Beatrice und Selina: [Unverständlich] *Interviewer*: Bleibt es ein Quadrat [/] *Selina*: Moment ja genau. [-] Das ist ja richtig. *Selina*: Ja es bleibt ein Quadrat. [-] Jetzt nicht mehr.	**Selina verzieht das Quadrat. Es verändert die Form.**	

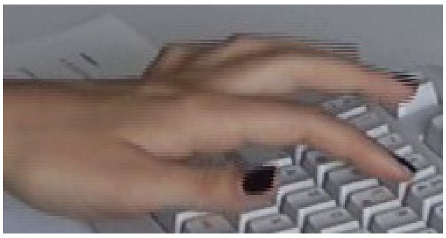
	Interviewer: Was ist jetzt wieder passiert [/]		
	Selina: Jetzt ist's vorbei. Jetzt sind die Bedingungen [-] Es hält sich an die Bedingungen, aber ah okay.	**Viereck hat wieder Form eines Quadrates.**	
	Interviewer: Können Sie's mathematisch begründen [/] Warums 'n Quadrat ist. Jetzt haben Sie also vier gleichlange Seiten und einen rechten Innenwinkel. Warum ist es dann schon ein Quadrat [/]		
	Selina: Weil sobald man einen Winkel festlegt die anderen auch davon abhängig sind also die anderen Winkel sind dann bei einem Quadrat äh dieselben. Also der gegenüberliege Winkel		
	Interviewer: Ja		
	Selina: ist dann automatisch derselbe. Und wenn wir dann hier äh wenn es als Dreieck betrachten sind's ja 180 Grad jeweils oder in einem Winkel sind's dann 300 äh in einem Quadrat sind's 360 Grad	**Selina zeigt auf den Monitor.**	
	Interviewer: Mhe.		
	Selina: Innenwinkel und wenn der gegenüberliegende Winkel auch 90 Grad ist [-] müsste dann		
	Beatrice: das mit den Stufenwinkeln oder [/]		
	Selina: Keine Ahnung. [Gelächter]		
	Beatrice: Ja ich stimme Dir zu weil wenn ich hier 'n Dreieck habe, dann habe ich ja hier 45 da 5 [-] ne hm doch das sind ja	**Beatrice zeigt auf den Monitor.**	

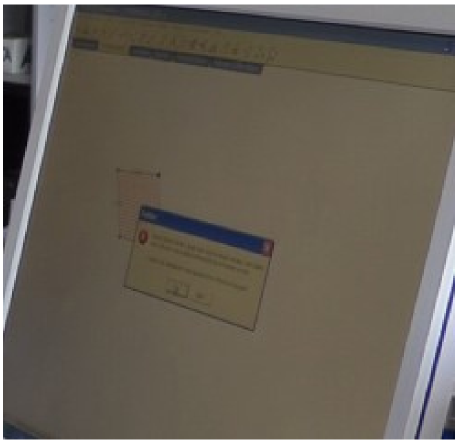
	dann 45 und vierzig und neunzig. *Selina*: Sind 180. *Beatrice*: Ja. *Selina*: Also ich glaub schon, aber ob's richtig begründet ist. [-] *Selina*: Meinen Sie 'ne andere Art von Begründung [/]. *Interviewer*: Ja 'ne stichhaltige. Ja [/] [-] Also welche Konsequenzen hat es denn, wenn Sie vier gleichlange Seiten haben und einen rechten Innenwinkel [/] Welche Konsequenzen hat das [/]. *Selina*: Da sind doch die Seiten liegen dann senkrecht aufeinander. *Interviewer*: Genau bei dem ersten Winkel richtig *Selina*: Genau [-] Das wenn äh vier Seiten gleich lange Seiten sind. Wenn die hier aufeinander liegen, dann ist es doch klar, dass es gegenüber auch genau so lang ist und es auch da [-] drauf liegt also es wenn ich hier die Bedingung von zwei ähm Seiten festlege wird es automatisch auf die anderen Seiten übertragen weil die auch alle gleich lang sind. Und dann [-] [unverständlich] *Selina*: Ich weiß nicht, wie ich das begründen soll. *Interviewer*: Gut, aber Sie haben ja jetzt ge-	**Selina klickt zwei Seiten des Quadrates an.**	

	sehen, dass es auf jeden Fall ein Quadrat bleibt. Ja.		
#3 **8:13 – 9:37**	*Interviewer*: Ähm warum haben Sie sich für dieses Programm entschieden [/] [-] als Sie die Wahl hatten. *Beatrice*: Also ich fand irgendwie das Euklid das war irgendwie so man musste immer in um jetzt zu zeichnen, da war man nicht im Dauermodus, da musste man immer extra erst alles anklicken und hier bin ich im Dauermodus und für mich ist das irgendwie handlicher und es geht schneller irgendwie zum Zeichnen. *Interviewer*: Ja wobei bei Euklid können Sie ja auch mit *Selina*: Ja. *Interviewer*: mit Steuerung und Auswahl des Werkzeugs auch in den Dauermodus kommen. Das wär ja jetzt 'ne Kleinigkeit *Selina*: Mh. *Interviewer*: sag ich mal. *Beatrice*: Ich find es auch hier irgendwie anschaulicher von allein von von der Aufmachung her und so spricht mich das irgendwie mehr an als. *Interviewer*: Das das wär eher was ich sag mal was Kosmetisches. *Beatrice*: Ja genau. *Interviewer*: Ja [/] *Beatrice*: Ja	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	

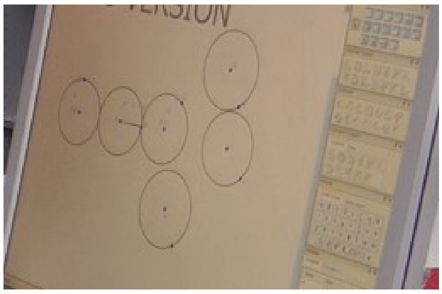
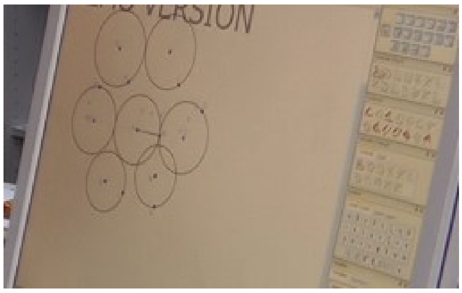
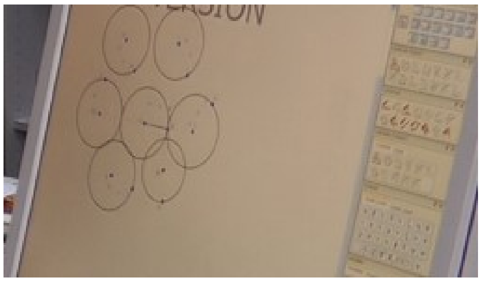
	Interviewer: Gibt’s prinzipielle Gründe [/] abgesehen von *Selina*: Für mich ist eigentlich das ähm DynaGeo leichter handzuhaben als das hier weil das mit diesen Bedingungen und ähm verschiedenen Abteilungen etwas verworrener ist für mich und dadurch dass man auch hier so Ausnahmefälle hat, indem man vielleicht anders zieht als man sollte beziehungsweise die das *Interviewer*: Ja zum Beispiel Mhe ja *Selina*: dann äh dann kriegt man das nicht mehr so hin wie man *Interviewer*: Mhe *Selina*: das vorher hatte. Deswegen finde ich eigentlich DynaGeo besser. *Interviewer*: Okay. *Selina*: Weil es klarer ist.	**Selina greift zur Maus und macht das Viereck sehr klein.**	
#4 **10:43-11:58**	*Selina*: So jetzt haben wir ein Viereck.	**Selina erstellt in EUKLID DynaGeo ein Viereck.**	
	Selina: Ähm. Da können wir Messen Rechnen. Kann man’s da festlegen [/] [-] Konstruieren wieso haben wir’s hier konstruiert [/]	**Selina fährt mit dem Mauszeiger entlang des Kopfleistenmenüs.**	

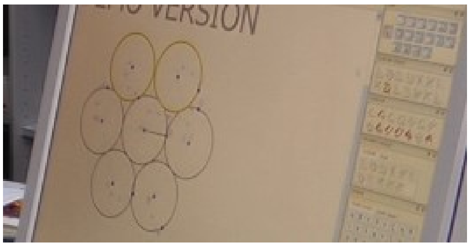
	Beatrice: Da müssen wir wieder äh die Strecke erst festlegen. *Selina*: Mhe. *Selina*: Aber auf die gleiche Länge dann. *Beatrice*: Mhe. *Selina*: Aber kann man das auch auf die Variable [/] *Beatrice*: Ich denk probier' es einfach. *Selina*: Oh. Interviewer: Jetzt haben Sie 'nen Punkt erzeugt *Selina*: Oops. *Interviewer*: mit Steuerung Z machen Sie's rückgängig. *Selina*: Konstruieren. Muss ich das [unverständlich]. Kann man gar nicht die Strecke anklikken oder doch [/] *Beatrice*: Doch wir müssen äh wieder hier *Selina*: Da ist es äh *Beatrice*: das da oben *Selina*: erst das wählen aber *Interviewer*: Also mit welchem Werkzeug möchten Sie hier weitermachen [/] *Selina*: Mit der Streck Streckenlänge. *Selina und Beatrice*: festlegen.	**Beatrice zeigt mit dem Finger auf das Kopfleistenmenü.** **Es erscheint die Fehlermeldung:** **Der aktuelle Wert ist ungültig.** **Selina wählt das Werkzeug Strecke fester Länge aus.** **Selina tippt ‚a' in die Eingabezeile ein.**	  

	Interviewer: Also offensichtlich akzeptiert er keine *Selina*: nein. *Interviewer*: allgemeinen Parameter, vielleicht akzeptiert er *Selina*: Okay. *Interviewer*: ‘ne Zahl. *Selina*: ‘ne feste [unverständlich] *Interviewer*: Sie haben schon wieder ‘nen Punkt erzeugt. [Gelächter] *Selina*: ach hätt ich vorher das wählen müssen *Interviewer*: Ja oder *Selina*: verworren *Interviewer*: Sie wählen’s eben mit Shift aus *Selina*: Stimmt. *Interviewer*: Ja [/] Dauermodus. So wenn Sie da mal 4 eintippen. *Interviewer*: So. [-]	**Es erscheint die Fehlermeldung: Der aktuelle Wert ist ungültig.** **Selina tippt ‚4‘ ein.**	 
#5 **13:00-14:59**	*Selina*: Okay. *Beatrice*: Ja. *Selina*: Jetzt ist der festgelegt die also die Strecke ist festgelegt. Das muss man jetzt mit jeder Strecke machen, um ein Quadrat herzustellen. Aber das ist nicht mehr variabel, wenn wir das ist aber kein Quadrat dann noch weil wir ja gesagt haben, dass es [unver-		

	ständlich]. *Interviewer*: Probieren Sie das doch mal weiter, was Sie da vorhaben. [-] *Interviewer*: Messen Sie. Lassen Sie die messen. *Selina*: Ah okay [unverständlich] *Selina*: Okay ich kann auch später messen, ich mach's erst mal zu Ende. *Interviewer*: Was sehen Sie jetzt? *Selina*: Die Strecke fester Länge kann nicht erzeugt werden, weil dabei [unverständlich] Verwandtschaftsbeziehung entstehen würde. *Interviewer*: Also was steht da jetzt [/] *Selina*: dürfen können keine Beziehung also keine gleich gleiche Beziehung für die ganzen Strecken des Quadra des Viereckes herstellen. *Interviewer*: Und ähm wie gehen Sie jetzt mit diesem Fehler um [/] [-] Verstehen Sie den Fehler [/] *Beatrice*: Ja weil die Strecke hier die ist äh länger als 4cm und wenn wir jetzt nur 4cm erzeugen würden *Interviewer*: Ja *Beatrice*: dann wär das hier äh kein Viereck mehr. *Selina*: [unverständlich] *Beatrice*: Dann würde ja hier ein Stück fehlen.	**Auf dem Bildschirm erscheint eine Fehlermeldung.** **Selina liest den Text der Fehlermeldung vor, vgl. die Abbildung 66 auf S. 62.**	

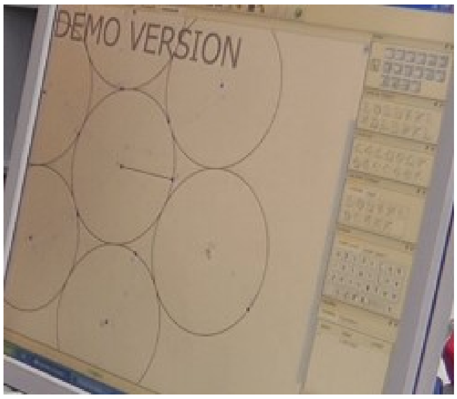
4.4.2 Passage Nr. 2 Anne und Sonja, Aufgabe Blumenmuster

Nummer und Zeit	Verbale Äußerungen	Aktivitäten	Bildschirmausschnitt
#1 **0:00-2:30**	*Anne*: Das sind die Kreise. *Anne*: Ach nö, jetzt hab ich den, ach das macht ja nichts. *Anne*: Nein, der wird ja total riesig. *Interviewer*: Was wollen Sie jetzt tun? *Anne*: Ich mach noch mal ganz schnell weg. *Interviewer*: Warum denn? Sie können doch *Anne*: Ich wollt's nur ein bisschen näher jetzt setzen ganz schnell. *Interviewer*: Aber das ist ja immer die Gefahr, dass Sie dann schon meinen, Sie hätten die Bedingungen realisiert. Verstehen Sie? *Anne*: Ach so. *Interviewer*: Deshalb ist es gar nicht schlimm, wenn wenn die augenscheinlich noch nicht passen, ja. *Anne*: Hm was hab ich jetzt gemacht? Hm, gar nichts. *Sonja*: Du musst es gedrückt halten. *Anne*: Ach so. Drückst Du für mich? *Sonja*: Jetzt noch mal das	**Anne erzeugt mit Geometry Expressions Kreise.** **Anne erzeugt weitere Kreise.** **Anne übermittelt Tangentialbedingungen an die Kreise.** **Sonja unterstützt Anne mit der Tastatur.**	  

	andere. *Anne*: Ach so. Jetzt muss ich erst mal hm, zack. Okay, jetzt noch *Sonja*: Ähm. Stopp. Start nochmal. *Sonja*: Upps. ‘Tschul-digung. *Anne*: Ich hab mich verdrückt. [unverständ-lich] *Anne*: Hab ich die zwei schon? *Sonja*: Ja, grade glaub ich. *Anne*: Ach ne. *Sonja*: Ne, doch nitt. *Interviewer*: Deshalb ist es eben gut, wenn Sie nicht schon so auf gut Augenmaß setzen, damit Sie eben *Anne*: Hm *Interviewer*: genau wissen, was ist denn schon exakt und was hab ich nur so hin gesetzt. *Anne*: Jetzt müsste das, ah guck mal. Ach dann noch die [Lachen] *Anne*: Das schieben wir noch. *Sonja*: Ja. *Anne*: Jetzt klappt’s. *Interviewer*: Und können Sie‘s auch kleiner oder größer machen? Das ganze Konstrukt.	**Anne übermittelt Tangentialbedingungen an die Krei-se.**	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Anne: Bestimmt. Ja.

Interviewer: Ja.

Interviewer: Schön. Das ist eine äh Lösungsmöglichkeit, Sie haben bisschen gebraucht, aber das ist ja nicht schlimm. Ähm bei der Variante komm ich wirklich sehr gerade zum Ziel, wenn ich eben diese Bedingungen übermittle, wenn ich mit diesen Bedingungen denke, ja okay.</td>
<td>Anne zieht an der Konfiguration.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>#2 2:31-4:06</td>
<td>Interviewer: Würden Sie ein neues File bitte starten, neue Datei starten? Aufmachen.

Interviewer: Und Frau Kaiser, Sie haben eine interessante Idee gegeben mit dem Sechseck.

Anne: Hm.

Interviewer: Ja. Wollen Sie die bitte mal vorführen?

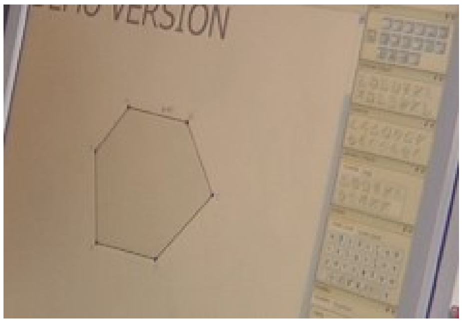
Anne: Eins, zwei, drei, vier, fünf, vier, fünf sechs. So. Okay.

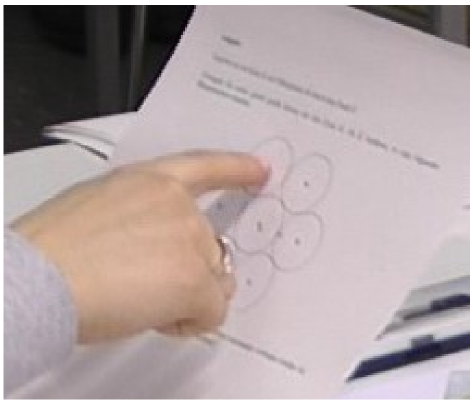
Interviewer: So bitte sagen Sie es nochmal. Was äh was wollen Sie mit dem Sechseck tun?

Anne: Äm erst mal

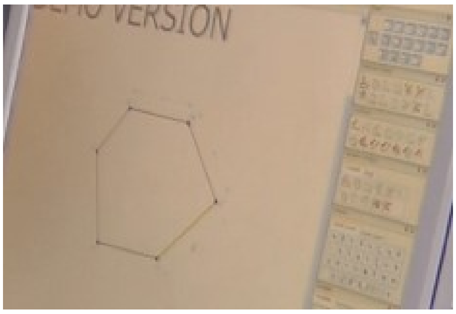
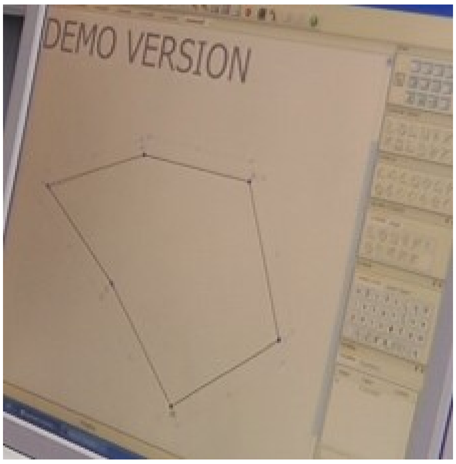
Interviewer: Oder wie kommen Sie auf dieses Sechseck? Warum grad ein Sechseck und wie sind Sie auf diese Idee gekommen?

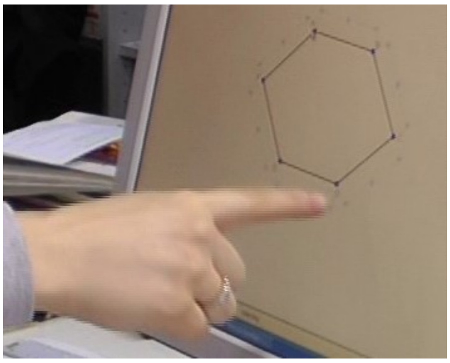
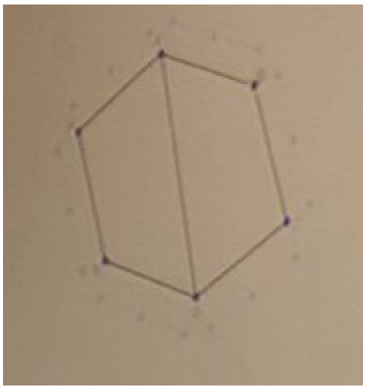
Anne: Ja in dieser also auf dieser Abbildung kann man ja gut sehen, dass die Abstände von diesem Punkt zu diesem Punkt derselbe ist wie</td>
<td>Anne erstellt ein Sechseck.

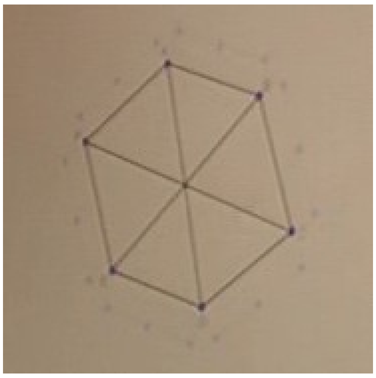
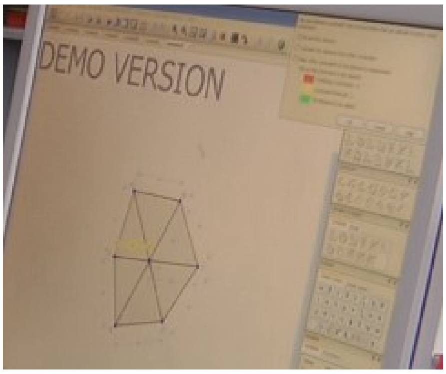
Anne zeigt auf die Figur des Aufgabenblattes.</td>
<td>

</td>
</tr>
</table>

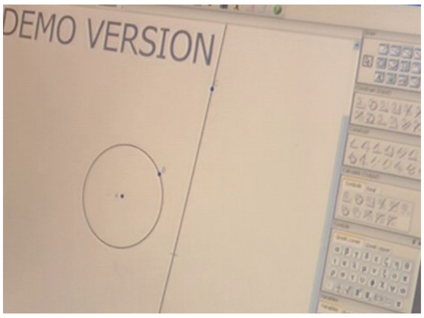
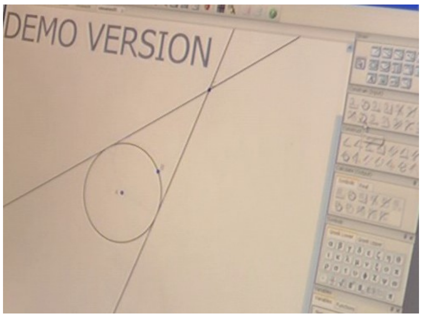
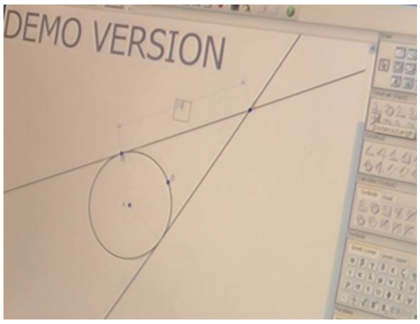
	von diesem zu diesem zu diesem *Interviewer*: ah *Anne*: zu diesem zu diesem zu diesem *Interviewer*: ah okay ja. *Anne*: und alle Punkte haben denselben Abstand zum Mittelpunkt *Interviewer*: Ja. *Anne*: Und äh und der Mittelpunkt zu einem anderen Mittelpunkt des Kreises *Interviewer*: Ja. *Anne*: haben da sie ja denselben Abstand haben, haben sie auch nen gemeinsamen Mittelpunkt der Strecke und das gilt dann auch sowohl hier als auch hier. *Interviewer*: Ja. *Anne*: Ja. *Interviewer*: Also realisieren Sie doch mal diese Abstandsbedingungen, die Sie gerade genannt haben. Dass also diese Abstände alle gleich groß sind. *Anne*: Hm. *Interviewer*: Würden Sie das mal bitte realisieren?	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	
#3 4:07-7:29	*Anne*: Drückst Du immer auf Enter? *Anne*: Ja. *Interviewer*: Sie können doch a wählen, dann können Sie's nachher auch größer oder kleiner		

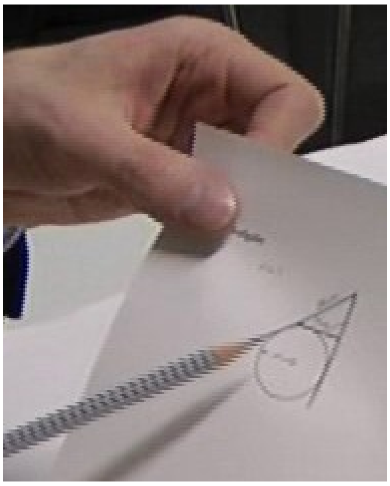
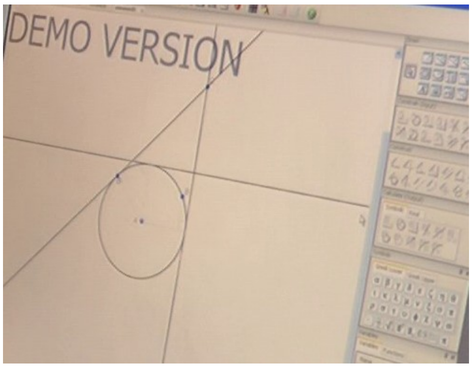
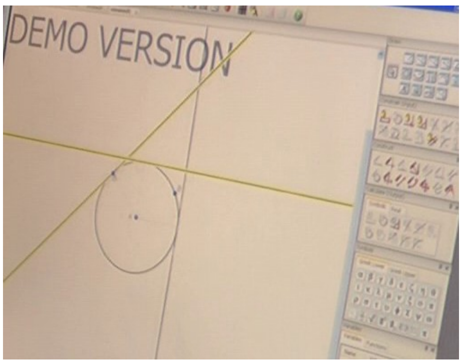
	machen. *Anne*: ach so. *Interviewer*: Einverstanden? *Anne*: Ach so, warum tipp ich überhaupt 5 ein. *Sonja*: Jetzt hab ich's ganz weg gemacht. *Anne*: Es ist ja schon perfekt. *Interviewer*: Oder Frau Schuler *Sonja*: Nein. *Interviewer*: Oder Frau Schuler übernehmen Sie doch die Maus *Sonja*: Ja *Interviewer*: und Frau Kaiser sagt, was Sie gerne machen würde, ja? Da möchten Sie auch a haben, ja. *Anne*: Ja. a. *Anne*: So jetzt haben sie zumindest alle denselben Abstand aber jetzt äh *Interviewer*: Ja. Ziehen Sie mal noch dran, um zu gucken wie viel Freiheit da noch drin ist. Da ist noch jede Menge Freiheit drin. Ja. *Anne*: Mh.äh [Gelächter] *Interviewer*: Ja, nicht übertreiben. [Gelächter] *Sonja*: Gleich geht's nicht mehr zurück.	**Anne übermittelt Abstandsbedingungen.** **Anne zieht an der Konfiguration.**	 

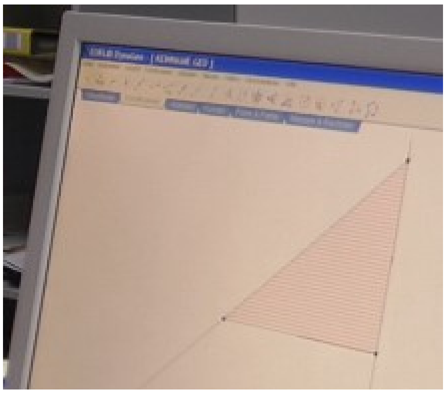
	Anne: Ne jetzt schon. *Interviewer*: Ne ist ja in Ordnung. *Anne*: vielleicht [unverständlich] damit man's besser sehen kann *Interviewer*: Was brauchen Sie jetzt noch? *Anne*: So, jetzt äh brauche ich, ich weiß nicht wie ich das jetzt nennen soll, aber ich ähm ich verbinde jeweils zwei Punkte mit-einander, und zwar A mit D, B mit E und F mit C und dann äh bestimme ich den Mittelpunkt. *Interviewer*: Ja. *Anne*: Ne. Machen wir das erst mal. [Gelächter] *Interviewer*: Ja genau, eins nach dem anderen. Ja. *Sonja*: Also was willst Du, A mit D verbinden? *Anne*: Mhe. *Sonja*: Einfach ne Strekke, oder. *Sonja*: Oder 'ne Grade oder *Interviewer*: Ja reicht 'ne Strecke oder, A mit D. *Anne*: Ja. *Anne*: Und jetzt den Mittelpunkt. Gibt's da irgendwie so 'n schnellen Weg, damit man jetzt [unverständlich] wir brauchen ja nochmal denselben Abstand nochmal, aber erst mal den Mittelpunkt. Und die die	**Anne zeigt auf Punkte der Konfiguration auf dem Bildschirm.** **Anne erzeugt eine Strecke.**	 

	müssen wir auch anklicken oder? *Sonja*: Es reichen zwei, oder? Also *Interviewer*: Ziehen Sie bitte nochmal an den Punkten, damit Sie *Anne*: ah ja okay. *Sonja*: [unverständlich] Ja und jetzt, was wolltest Du jetzt machen? *Anne*: ähm. *Interviewer*: Was muss jetzt *Anne*: Jetzt auch nochmal die müssen auch alle a lang sein. Aber die sind ja alle *Sonja*: ja [unverständlich] *Interviewer*: Dann müssen Sie einfach nochmal die ‘ne Strecke neu einzeichnen AG jetzt, weil‘s die noch nicht gibt für den Computer.	**Anne verbindet gegenüberliegende Eckpunkte.**	
	Sonja: Kann man’s auch einfach da drüber machen sozusagen? *Interviewer*: Ja können Sie drüber zeichnen AG. *Sonja*: Zu allen ‘ne? Also *Interviewer*: Mh. *Interviewer*: Jetzt können Sie den Abstand realisieren. Sie müssen anklicken. *Sonja*: Mh.[-] Äh. *Anne*: Mach mal hier weiter. Vielleicht dann *Sonja*: Ich hab nichts gemacht. [Gelächter]	**GE gibt die Fehlermeldung aus, dass logische Bedingungen nicht vereinbar sind (vgl. Abbildung 90 auf S. 81).**	

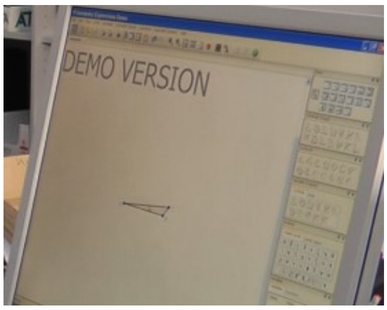
4.4.3 Passage Nr. 3 Lara-Marie, Eigenmann-Aufgabe Nr. 78

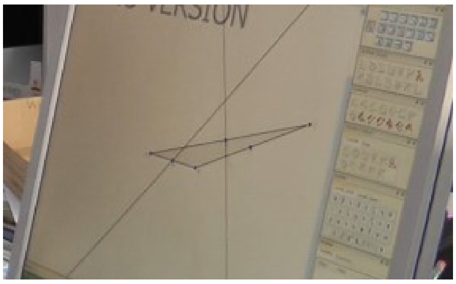
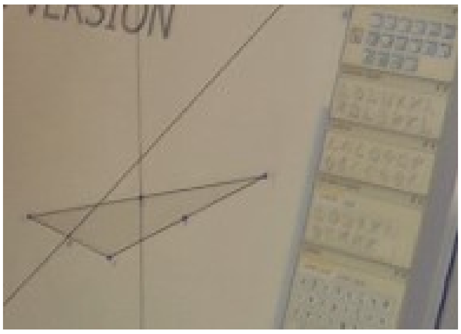
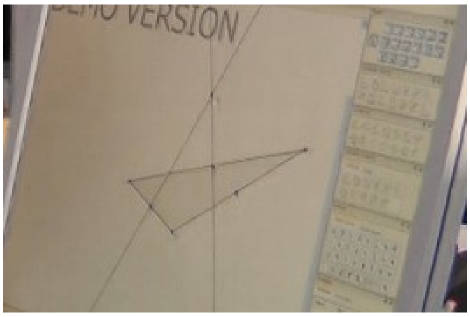
Nummer und Zeit	Verbale Äußerungen	Aktivitäten	Bildschirmausschnitt
#1 **0:00 – 2:20**	*Lara-Marie*: Den kann ich ja dann verändern. Ich brauch 'nen Punkt außerhalb und dann ne Grade. [--]	**Lara-Marie erzeugt in GE einen Kreis, einen Punkt und eine Gerade.**	
	Lara-Marie: 'ne Grade durch diesen Punkt. Ähm. Whoops. Jetzt blend ich das aus. [-] Die sind ja tangential. *Lara-Marie*: Okay jetzt brauch ich [-] den. Da dran kann ich ziehen. [-] Jetzt kann ich dem ja sagen hier ist 'n Punkt 'n Schnittpunkt.[-]	**Probandin erstellt weitere Gerade und übermittelt Bedingungen an die Konfiguration.**	
	Lara-Marie: Der Abstand muss [-] 29 sein. [-]	**Probandin übermittelt Abstandsbedingung.**	
	Interviewer: **Stimmt das?** [--]	**Interviewer hält das Aufgabenblatt hoch.**	

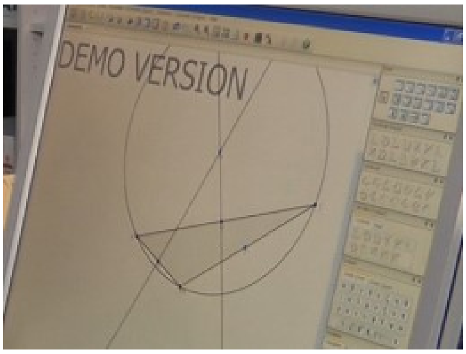
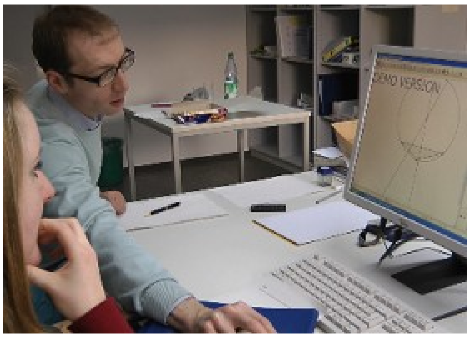
	Lara-Marie: Ach ne die ganze Grade muss. Ah okay. Ja aber dann kann ich. [-]		
	Interviewer: Hier haben Sie noch so ‘n kleines Stückchen. Ja[/]. Sehen Sie das[/].	**Interviewer zeigt mit Bleistift auf das Aufgabenblatt.**	
	Lara-Marie: Mh. Also die 29 sind das.		
	Interviewer: Ne, **die** 29 die gehen bis hierhin.		
	Lara-Marie: Ah. Ach so die gehen bis dahin. Ach so.		
	Interviewer: Aber die Gerade berührt ungefähr hier.		
	Lara-Marie: Ah okay.		
	Interviewer: Okay[/].		
	Lara-Marie: Mh. [-]		
	Lara-Marie: So okay dann brauch ich [-] noch ‘ne Grade [-] die		
	Interviewer: Genau.	**Die Probandin erzeugt eine weitere Gerade und übermittelt weitere Bedingungen.**	
	Lara-Marie: ja jetzt muss ich noch sagen, dass die auch		
	Interviewer: ja [-] Und was noch[/]		
	Lara-Marie: dass hier ein rechter Winkel ist. [-]		
	Interviewer: Ja. [-] Haben Sie jetzt auch. Und jetzt[/].		
	Lara-Marie: Und jetzt kann ich den Schnittpunkt konstruieren.	**Probandin wählt zwei Geraden aus.**	
	Interviewer: Ja. [--]		
	Lara-Marie: Und den [-] auch.		
	Lara-Marie: Und jetzt kann ich sagen, dass das $29cm$ sind. [-]	**Probandin tippt etwas ein.**	

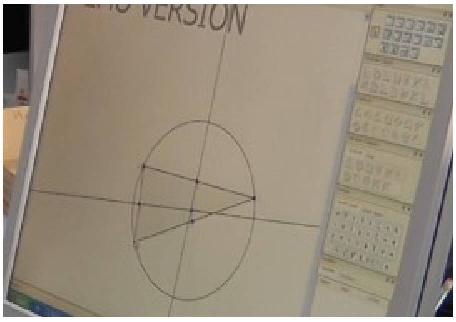
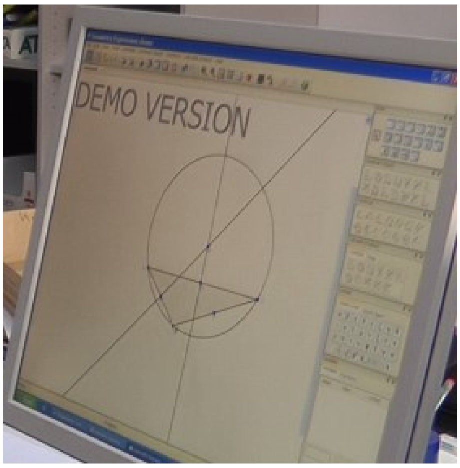
#2 **5:33 – 6:31**	*Interviewer*: Jetzt, wie kriegen wir den Kreis hin? *Lara-Marie*: Mh [-] Jetzt kann ich ja wieder einfach ein Kreis zeichnen. [-] Und dann kann ich wieder bestimmen, dass die sich schneiden müssen. Also die [-] den Schnitt bestimmen. *Interviewer*: Machen Sie mal, was Sie meinen. [--] Das ist ja noch nicht stabil. *Lara-Marie*: Ja jetzt muss ich ja noch [unverständlich] ach so. Ah 'ne. [unverständlich] *Interviewer*: Was wollen Sie machen? *Lara-Marie*: Ich wollte ah ja die Tangente muss ich ja ich muss ja jetzt sagen, dass es die Tangente ist. *Interviewer*: Okay. *Lara-Marie*: hier dran. *Interviewer*: Und zwar daran und wo noch? *Lara-Marie*: Und an der anderen Seite? *Interviewer*: Und wo noch? *Lara-Marie*: Da oben ja auch. *Interviewer*: Genau, dreimal. *Lara-Marie*: Ja. *Interviewer*: Aber äh jetzt denken Sie halt wieder relational. *Lara-Marie*: Ja. Ja das ist viel einfacher. *Interviewer*: Hahaha (*lacht*) okay.	**Probandin arbeitet mit EUKLID DynaGeo.**	

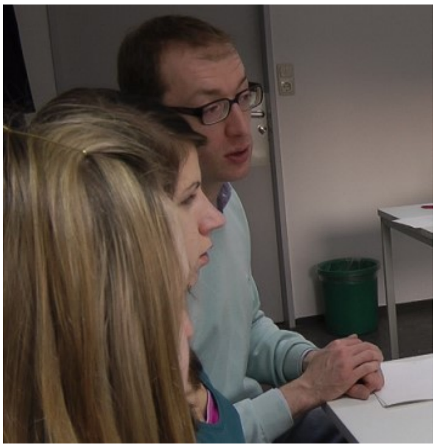
4.4.4 Passage Nr. 4 Tina und Natalie, Aufgabe Umkreismittelpunkt

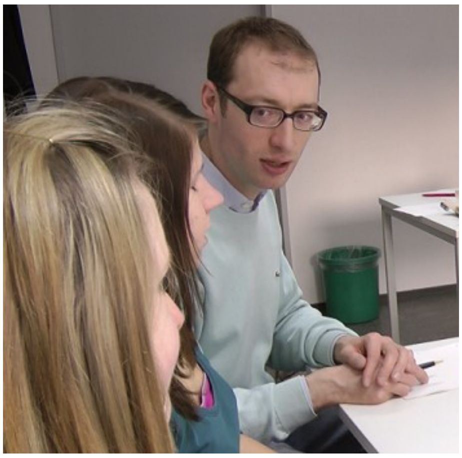
Nummer und Zeit	**Verbale Äußerungen**	**Aktivitäten**	**Bildschirmausschnitt**
#1 **0:00-0:17**	*Interviewer*: Wann liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks innerhalb des Dreiecks, wann außerhalb? *Interviewer*: Kann er eigentlich außerhalb des Dreiecks liegen oder kann er überhaupt innerhalb des Dreiecks liegen? Welche Vorstellung haben Sie?	**Interviewer liest die Aufgabenstellung vor.**	
#2 **0:18-0:50**	*Natalie*: Also innerhalb kann er auf jeden Fall liegen. *Tina*: Mh. Außerhalb aber auch. *Interviewer*: Würden Sie es mir mal veranschaulichen? Von mir aus mit in der Luft oder auf ner Skizze oder mit ner Software. Wie würden Sie mir das veranschaulichen? Dass der Umkreismittelpunkt sowohl im Inneren des Dreiecks als auch ausserhalb des Dreiecks liegen kann. *Tina*: Wenn das so extrem ist halt oder liegt er außerhalb. Natalie: Gucken wir mal.	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	
#3 **0:51-2:17**	*Tina*: Ist egal mit welchem? *Interviewer*: Was Sie möchten, ja. *Tina*: Jetzt kann man die [unverständlich] oder?	**Tina öffnet Geometry Expressions und erzeugt ein kleines Dreieck.**	

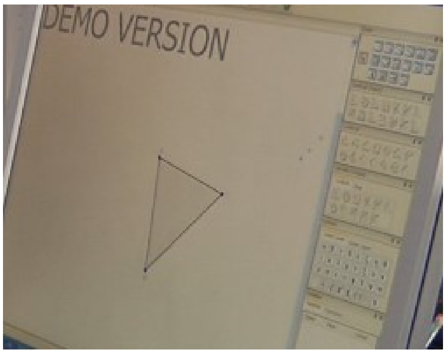
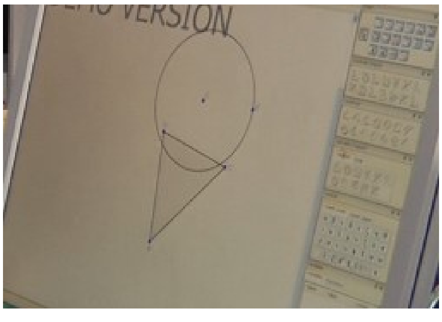
	Ja, ne. *Natalie*: Mh. *Interviewer*: Sie müssen ja noch, erst die Objekte angeben und dann die Bedingungen. *Interviewer*: Was machen Sie? *Tina*: Die Mittelsenkrechten. *Natalie*: Ja. *Natalie*: Dann noch von den anderen, zu mindestens von einem. *Interviewer*: Machen Sie doch das Dreieck ein bisschen größer. *Tina*: Okay ich mach dann. *Interviewer*: Im nächsten Schritt weil die Punkte kleben ja schon aufeinander.	**Tina erstellt die Mittelsenkrechte.** **Tina vergrößert das Dreieck.**	
#4 **2:18-3:06**	*Interviewer*: Würden Sie mal an E ziehen? An E. *Tina*: Soll ich, in welche Richtung wollen Sie es denn? *Interviewer*: Also E ist der Mittelpunkt, seh ich das, *Tina und Natalie*: Ja *Interviewer*: Das haben Sie so konstruiert ja oder erstellt sagen wir mal ja. *Interviewer*: Okay gut. Ja. Genau. Was brauchen Sie jetzt noch? *Tina*: Den rechten Winkel.	**Tina zieht am Dreieck.**	 

	Interviewer: Ja. Mh. *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Was machen Sie jetzt? *Tina*: Dann seh ich [unverständlich] mit dem Schnittpunkt hier, ne. *Natalie*: Eigentlich schon. Ja. *Natalie*: An sich wird's schon gehen.		
#5 **3:07-6:10**	*Tina*: Jetzt ist er halt außerhalb. *Interviewer*: Würden Sie grad noch den Umkreis einz oder erstellen. Dann sehen wir auch, dass es richtig ist. *Tina*: [unverständlich] *Natalie*: Ne, zieh mal an C glaub ich. *Interviewer*: Können Sie auch an G ziehen? *Natalie*: Ich glaub nicht so einfach, weil die sind ja abhängig von den anderen. *Interviewer*: Probieren Sie es doch mal aus. *Tina*: Ne. *Interviewer*: Das wundert mich jetzt sehr. Darf ich mal probieren? *Tina*: Ja. *Tina*: Aber dann muss der doch kleiner oder größer werden der Kreis.	**Tina erzeugt den Dreiecksumkreis.** **Interviewer übernimmt Mauskontrolle.**	 

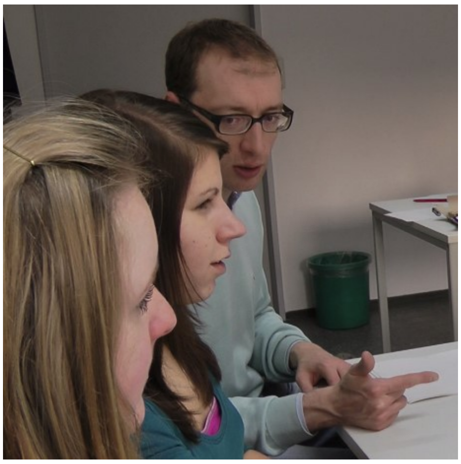
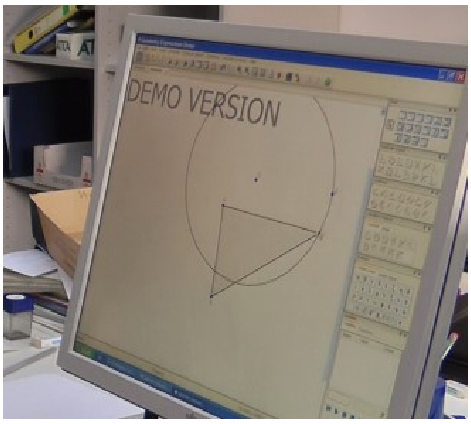
	Interviewer: Ah okay. Ja können Sie nicht dran ziehen, aber Sie können an E ziehen. Ja? Okay.	**Interviewer gibt Mauskontrolle zurück.**	
	Interviewer: Jetzt haben wir also den Umkreis und den Umkreismittelpunkt. Und jetzt liegt der hier außerhalb des Dreiecks. Und können Sie es schaffen, dass er innerhalb des Dreiecks liegt?		
	Interviewer: Ja geht also auch.	**Tina zieht an der Konfiguration.**	
	Interviewer: Okay. Und jetzt ist die Frage ja wann liegt er denn jetzt innerhalb des Dreiecks und wann liegt er außerhalb des Dreiecks. Können Sie da Bedingungen formulieren, um das zu beschreiben? Also wenn das so und so, dann liegt er innerhalb des Dreiecks und wenn es so und so ist, dann liegt er außerhalb des Dreiecks.		
	Tina: Wenn der Winkel, wenn ein Winkel größer als 90 Grad ist, liegt er außerhalb oder?	**Tina zieht wieder an der Konfiguration.**	
	Interviewer: Aha. Wie kommen Sie da drauf?		
	Tina: Man sieht ja jetzt, dass der Winkel zwischen BA und BC größer als 90 Grad ist.		
	Interviewer: Welchen meinen Sie, den Winkel bei B meinen Sie?		
	Tina: Ja.		
	Natalie: Ja.		
	Interviewer: Ja okay. Und wenn Sie den wieder		

	Interviewer: Ja okay. *Tina*: [unverständlich] ungefähr gleich. *Interviewer*: Und was ist, wenn dieser Winkel exakt 90 Grad beträgt? *Natalie*: Können wir ja grad mal ausprobieren. *Interviewer*: Richtig. [Ge1lächter] *Interviewer*: Oder Sie könnten auch so nachdenken. Ja. *Natalie*: Ja, wir können auch so nachdenken. Der liegt dann auf dem Punkt, also der Punkt G liegt dann auf dem Punkt D. *Interviewer*: Aha. Und was fällt Ihnen noch dazu ein, zu dieser Spezialsituation? Fällt Ihnen da, das eine besondere Konfiguration, die da vorliegt. Fällt Ihnen dazu was ein? *Natalie*: Ähm. *Tina*: Satz des Thales. *Interviewer*: Satz des Thales, richtig. Ja. *Interviewer*: Sehen Sie das auch? *Natalie*: Mhm. *Interviewer*: Gut das haben Sie schon dann erkannt, ja. Und damit können Sie das präzise beschreiben. Also wenn so ein Winkel, wenn Sie ein spitzes Dreieck haben, liegt der äh Umkreismittelpunkt außer-	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	

	halb und wenn der Winkel kleiner als 90 Grad ist, liegt er innerhalb und bei 90 Grad liegt er genau auf einer Dreiecksseite und das nennt man auch Satz des Thales. *Natalie*: Mh. *Interviewer*: Genau.		
#6 **6:11 – 8:59**	*Interviewer*: Jetzt haben Sie sich hier als Erstes für Geometry Expressions entschieden. Hat das 'nen Grund? *Tina*: Also irgendwie mag ich den mittlerweile lieber. *Interviewer*: Ja, aber *Tina*: Bei dem anderen kann man halt nimmer danach noch einstellen wie man es gerne hätte. *Interviewer*: Haben Sie aber hier auch nicht gebraucht. Sie haben ja hier ne Konstruktion erstellt. *Natalie*: Mm. *Interviewer*: Einverstanden? Mit den Mittelsenkrechten. *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Das hätten Sie doch genauso in Euklid machen können, oder? *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Ja. Mal angenommen, Sie hätten das jetzt nicht äh Sie hätten diese Funktion nicht zur Verfügung, dieses strenge Konstruieren, wie würden Sie das denn machen, wenn	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	

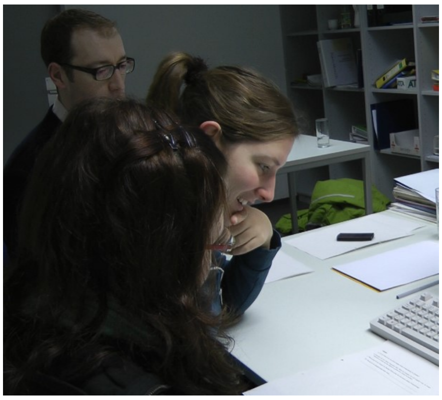
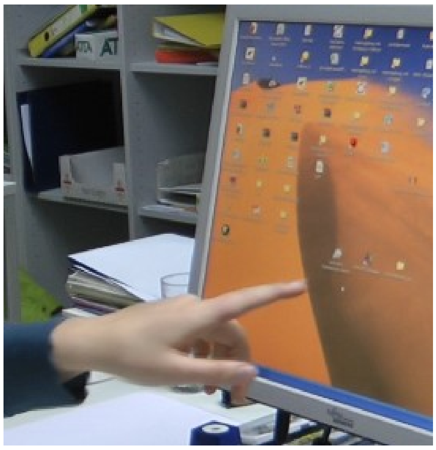
	Sie Bedingungen übermitteln würden, um diese Konfiguration hinzubekommen also ein Dreieck und ein Umkreis. Wenn Sie Bedingungen übermitteln. Wie würden Sie da vorgehen? *Natalie*: Ja also jetzt mit Euklid dann? *Interviewer*: Ne, Ne mit Geometry Expressions, weil dort können Sie ja Bedingungen übermitteln, bei Euklid können Sie ja keine Bedingungen übermitteln. *Natalie*: okay. *Interviewer*: Einverstanden? *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Dann fangen Sie doch noch mal mit nem Dreieck an. Vielleicht gehen Sie auf File, New. *Tina*: Kannscht du [unverständlich] *Natalie*: kann ich machen.		
	Interviewer: Und fangen Sie mal wieder mit nem Dreieck an. *Interviewer*: Irgendeins.	**Natalie übernimmt Mauskontrolle von Tina und erzeugt ein Dreieck.**	
	Interviewer: So und nen Kreis. *Natalie*: Irgendeinen? *Interviewer*: Ja. *Interviewer*: Irgendeinen. Genau. So.	**Natalie erstellt einen Kreis.**	

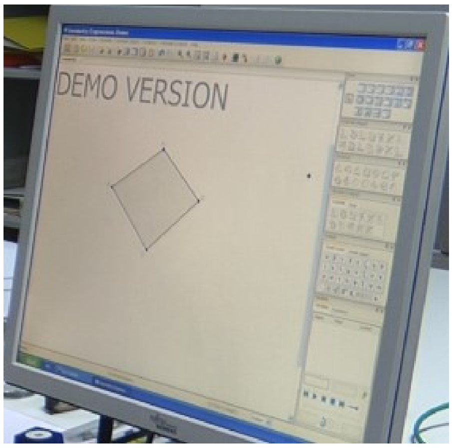
	Interviewer: Und jetzt soll dieser Kreis und das Dreieck eben so verändert werden, dass nachher der Kreis immer der Umkreis des Dreiecks ist. Und das soll dadurch geschehen, indem Sie Bedingungen an das System übermitteln. Wie können Sie das erreichen? *Natalie*: Ja die Punkte müssen alle auf E liegen. *Interviewer*: Sie meinen auf dem Kreis? *Natalie*: Ja auf dem *Interviewer*: Die Eckpunkte müssen auf dem Kreis liegen. *Natalie*: Kreis. Ja. *Interviewer*: Wie bekommen Sie das hin? *Tina*: Schnittpunkte. *Natalie*: [unverständlich] Punkt ja genau. *Natalie*: Was das hier ne das war die Tangente. *Interviewer*: Bei welcher Palette schauen Sie jetzt nach? *Natalie*: Ich bin mir grad unsicher. *Interviewer*: Dann überlegen wir laut. *Tina*: Beim Konstruieren dürfen wir ja nitt gucken. *Interviewer*: Was wollen Sie jetzt machen? Was tun Sie jetzt äh von der Kategorie her?	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	

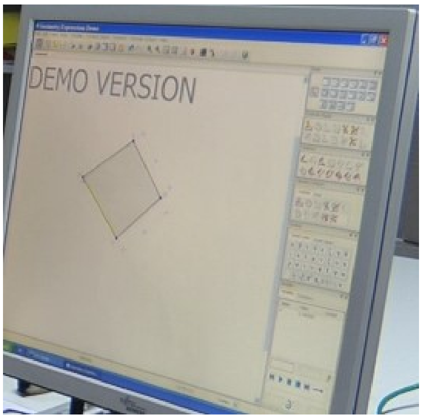
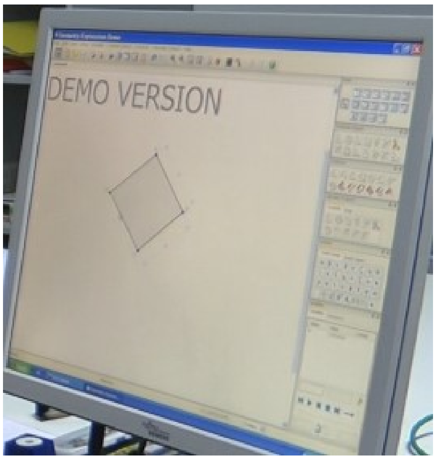
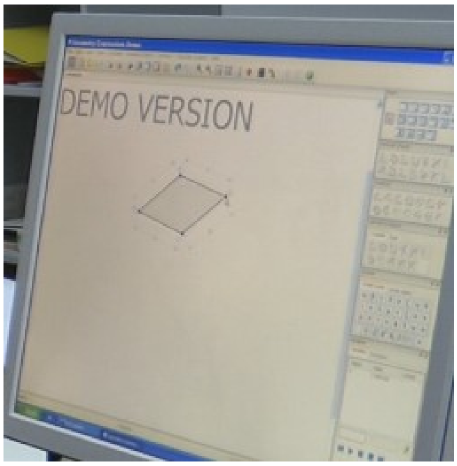
	Interviewer: Konstruieren Sie jetzt was? *Natalie*: Ne. *Interviewer*: Messen Sie was? *Natalie*: Ne *Interviewer*: Übermitteln Sie ne Bedingung? *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Und wo bei welcher Palette müssen Sie dann schauen? *Tina*: der ersten. *Natalie*: Ja. *Interviewer*: Und die heißt? *Tina*: Constraint. *Interviewer*: Genau. Da müssen Sie also gucken.	**Probandinnen und Interviewer unterhalten sich.**	
#7 **9:15 – 9:48**	*Natalie*: Okay, ich konnt's nicht genau erkennen. Also das Symbol weil das dann so durch die Farben. *Interviewer*: Die rot markierten das sind dann die, die Ihnen zur Verfügung stehen. *Natalie*: Ja ja *Interviewer*: deshalb brauchen Sie bei den anderen gar keine Zeit zu verschwenden. *Natalie*: Ja, ich habe das nicht erkannt, dass es das ist. *Interviewer*: Okay. Und jetzt ziehen Sie doch mal dran. Ziehen Sie doch	**Natalie zieht an der Konfiguration.**	

	mal dran bitte. *Interviewer*: Und? Stellt sich das so dar wie Sie das möchten? *Natalie*: Ja, noch. *Interviewer*: Ja noch, also und was machen Sie jetzt? Jetzt haben Sie es geschafft, dass ein Eckpunkt des Dreiecks auf dem Kreis liegt. *Natalie*: Das machen wir jetzt noch mit den anderen zwei. *Interviewer*: Ja.		

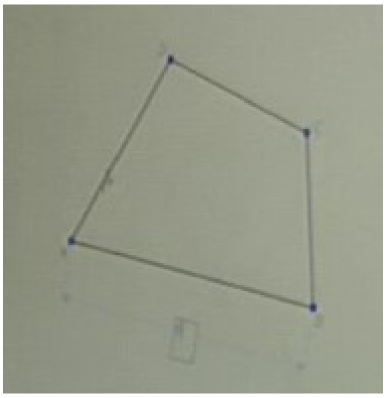
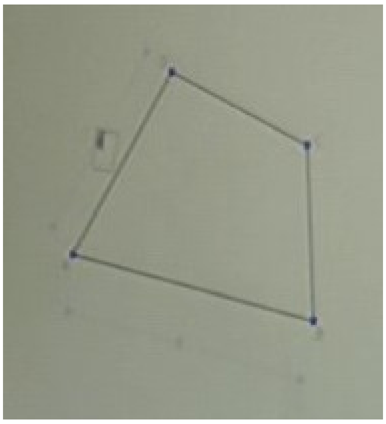
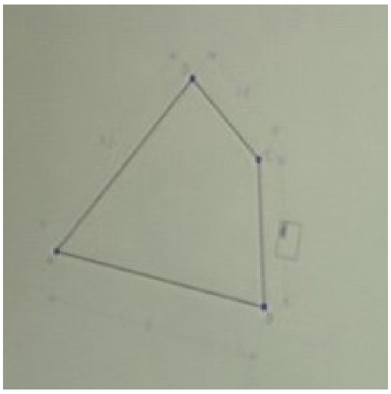
4.4.5 Passage Nr. 5 Elena und Irmgard, Aufgabe Quadrat

Nummer und Zeit	**Verbale Äußerungen**	**Aktivitäten**	**Bildschirmausschnitt**
#1 **0:00 - 0:05**	-	**Interviewer legt die Aufgabe „Quadrat“ vor.**	
#2 **0:05 - 0:25**	*Irmgard*: Okay, können wir ja ausprobieren eigentlich. *Elena*: Ja, aber ich würd jetzt automatisch sagen ja. *Irmgard*: Ja ich auch, aber wir können es ja überprüfen. *Interviewer*: Also Sie haben beide den Eindruck, dass das schon ein Quadrat ist, wenn die Seiten gleich lang sind alle. *Elena*: Ja, das ist ja die Bedingung für ein Quadrat. *Irmgard*: Ja	**Beide Probandinnen geben ad hoc Antwort auf die Frage der Aufgabe.**	
#3 **0:25 - 0:45**	*Elena*: Wollen wir es auch gleich mal zeichnen? *Irmgard*: Ja. Mit welchem wollen wir es machen? *Elena:* Ich hätte jetzt gesagt mit äh wie heißt es hier, das andere, das zweite, das wir gemacht haben. *Irmgard*: Ja ich auch [Unverständlich] *Irmgard*: Okay.	**Elena zeigt mit einem Finger auf den Bildschirm.** **Die Probandinnen entscheiden sich für Geometry Expressions.**	

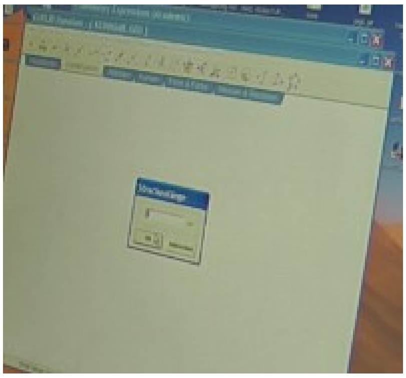
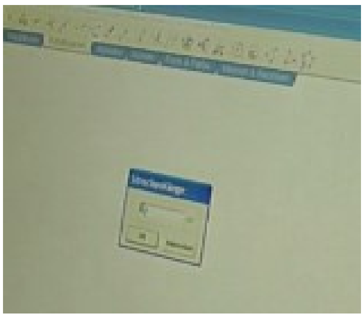
	Elena: Da kann man die Seiten auch gleich festlegen.		
#4 **0:45 - 1:30**	*Irmgard*: Ja ich glaub, machen wir das dann jetzt. Und dann können wir *Elena*: da drauf klicken kannst du. *Irmgard*: Ja mit Pfeil *Elena*: Da ist der Pfeil *Irmgard*: Genau. *Elena*: 5, na ja ist eigentlich egal. *Elena*: Oder a, mach es a, ist vielleicht besser. *Irmgard*: Ja. *Interviewer*: Warum machen Sie es a und nicht 5? *Elena*: Dann ist es nicht abhängig von einer Zahl, sondern von einer Variablen. *Irmgard*: Dann gilt es für alle. *Interviewer*: Also man kann nachher noch dran ziehen und es kleiner oder größer machen. *Elena*: Ja genau. Das auch. *Irmgard*: Stimmt. *Elena*: Es nähert sich einem Quadrat. *Interviewer*: Ziehen Sie doch mal dran. *Elena*: Ja	**Die erste Seitenlänge des Vierecks wird mit einer Variablen a festgelegt.**	

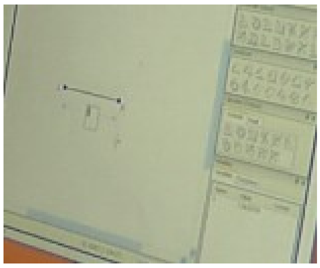
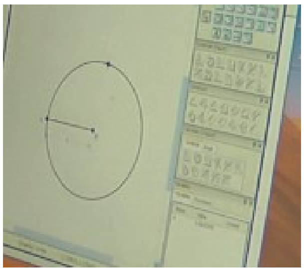
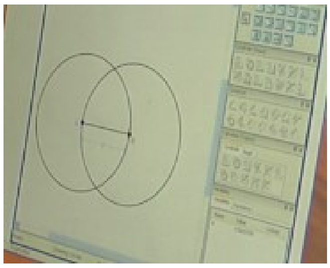
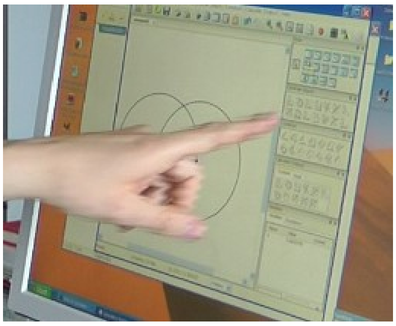
	Irmgard: Ja *Elena*: Könntest Du mal da dran ziehen an C, dann müsste es eigentlich auch größer werden. Ja. *Irmgard*: Ja, hm. *Elena*: Okay gut.	**Irmgard zieht an einem Punkt des Quadrats.**	
#5 1:31-2:02	*Interviewer*: Jetzt haben Sie zwei Seiten, die gleich lang sind. *Irmgard*: Jetzt sieht man ja schon, wenn man das augenmaßlich macht, dass es schon Richtung Quadrat geht wahrscheinlich. *Elena*: [unverständlich] *Irmgard*: [unverständlich] *Elena*: Tada, ein Quadrat. *Interviewer*: Ein Quadrat. Und jetzt ziehen Sie mal dran.	**Irmgard übermittelt Geometry Expressions Bedingungen, dass die weiteren Seiten des Quadrates die Seitenlänge a erhalten.**	
#6 2:03-2:28	*Irmgard*: Ja, klar. *Interviewer*: Und jetzt ziehen Sie mal *Irmgard*: **ah** *Elena*: **ah, ah ja klar**. Die Bedingung rechter Winkel fehlt. Ja. *Irmgard*: Ja es kann auch ein Drachen sein. *Elena*: Ja, ne Raute. Drache is *Interviewer*: Sie sehen, es reicht nicht aus.	**Irmgard zieht an der Konfiguration.**	

4.4.6 Passage Nr. 6 Lena und Hasan, Eigenmann-Aufgabe Nr. 51 (II)

Nummer und Zeit	Verbale Äußerungen	Aktivitäten	Bildschirmausschnitt
#1 **0:56 – 1:34**	*Lena*: Sollen wir wirklich 60 nehmen oder 6 Zentimeter [/] *Hasan*: 6 Zentimeter *Interviewer*: Ja machen Sie mal oder 6 auch in Ordnung. *Lena*: Ähm. [-] *Interviewer*: Fünf **Punkt** zwei. *Lena*: Ah Punkt. *Interviewer*: Ja weil Sie im Englischen sind. [-] *Lena*: Äh D C also C D *Interviewer*: Zwei Komma Fünf Zwei Punkt Fünf *Interviewer*: Und *Lena*: C B *Interviewer*: ist Drei Punkt Neun.	**Probanden arbeiten mit GE.** **Lena übermittelt eine Abstandsbedingung für eine Seite des Vierecks.** **Lena tippt eine weitere Abstandsbedingung ein.** **Lena tippt die dritte und die vierte Abstandsbedingung ein.**	  

4.4.7 Passage Nr. 7 Jennifer und Daniela, Aufgabe Quadrat

Nummer und Zeit	**Verbale Äußerungen**	**Aktivitäten**	**Bildschirmausschnitt**
#1 **2:59 – 3:21**	*Daniela*: Du kannst ja mit der Strecke anfangen $3cm$. Steuerung Z, genau. *Jennifer*: Okay. *Daniela*: Mit der Strecke oder mit zwei Punkten is eigentlich *Jennifer*: Sollen wir die einfach mal a nennen? Das geht doch, oder? *Daniela*: Wir sind bei DynaGeo. *Daniela*: Du musst erstmal zeichnen, dann musst Du die Streckenlänge eingeben. *Jennifer*: Ach so gut okay dann geht das nicht. *Daniela*: Ah allgemein kann er hier nicht machen, das kann er aber doch bei [.] dem anderen oder?	**Beide Probandinnen arbeiten in EUKLID.** **Daniela klickt das Werkzeug Strecke fester Länge an. Das zugehörige Menü öffnet sich.** **Jennifer tippt etwas ein.** **Es erscheint die Fehlermeldung: Der aktuelle Wert ist ungültig.**	 
#2 **3:22 – 3:38**	*Jennifer*: Ich glaub schon. Ähm dann machen wir's [..] hier. Machen wir drei. *Daniela*: Ja das ist egal, mach drei. *Jennifer*: vier.	**Jennifer wählt das Werkzeug Strecke fester Länge.** **Jennifer tippt etwas ein.**	

	Jennifer: Eins zwei so. *Daniela*: hä? [.] Okay. *Jennifer*: Okay jetzt brauchen wir dafür ’ne Senkrechte. Äh ja	**Auf dem Bildschirm erscheint eine Strecke.**	
#3 **7:32 – 8:59**	*Jennifer*: Ach so da kann man ja jetzt zum Beispiel a eingeben. *Daniela*: Genau, das ging vorher bei Euklid nicht. *Jennifer*: So wenn ich da die Orthogonale brauche. *Daniela*: Oder Du zeichnest nur ’n Kreis geht auch.	**Jennifer übermittelt in GE die Bedingung, dass die Streckenlänge a betragen soll.**	
	Jennifer: Ja gut mit dem Radius a. *Jennifer*: Zirkel *Daniela*: Da ah genau. *Jennifer:* stimmt.	**Jennifer wählt das Werkzeug Kreis aus und lässt den zweiten Punkt des Kreises auf dem linken Punkt der Ausgangsstrecke einrasten.**	
	[-] *Daniela*: [..] Äh […] *Daniela*: Jetzt äh du kannst jetzt wieder ’ne Senkrechte zeichnen.	**Jennifer erstellt einen zweiten Kreis.**	
	Jennifer: Aber wo ist die Senkrechte denn hier siehst du die? *Daniela*: Ja, die ist hier irgendwo glaub ich oder. *Jennifer*: Muss ich da raus. Ach so ich kann	**Daniela zeigt mit dem Finger auf den Bildschirm.**	

	Daniela: Klick mal die Strecke an. *Daniela*: Ne du musst die Strecke [unverständlich] senkrecht machen kannst. [.] ääääääh *Jennifer*: Da. *Daniela*: Ah ja genau. [-] *Daniela*: oder ne das war die Mittelsenkrecht okay. *Interviewer*: Was tun Sie im Vergleich zu Ihrem Vorgehen von gerade eben? *Daniela*: Also ich find‘ ich muss eher um die Funktion, was ich suche, bewusst sein. *Interviewer*: Also möchten Sie das jetzt genau so machen wie in Euklid? *Jennifer:* Ja hätten wir versucht weil wir jetzt hier ne Senkrechte noch reinzeichnen.	**Daniela drückt eine Tastenkombination.**	

4.5 Auswertung der ausgewählten Interviewpassagen

Die Auswertung der ausgewählten Interviewpassagen gliedert sich für jede Forschungsfrage in die folgenden Unterpunkte:

1. Aus der Transkription werden Beobachtungen gesichtet.

2. Beobachtungen werden zu einer oder mehreren möglichst falsifizierbaren Hypothese/n verdichtet.

3. Die Hypothese wird analysiert: Zuerst wird sie theoretisch unterfüttert, danach theoretisch angegriffen.

4. Die Hypothese wird angenommen, modifiziert oder abgelehnt.

Diese Schritte wenden wir nun auf die praktischen Forschungsfragen der Reihe nach an.

4.5.1 Wie gehen Probanden mit den Möglichkeiten von Geometry Expressions als Vertreter eines RGS um?

Wir sichten und interpretieren die folgenden Beobachtungen aus der Transkription.

a) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 8:13 – 9:37 sagt Selina: „*Für mich ist eigentlich das ähm DynaGeo leichter handzuhaben als das hier weil das mit diesen Bedingungen und ähm verschiedenen Abteilungen etwas verworrener ist für mich* …“

b) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 8:13 – 9:37 setzt Selina den Satz fort mit: „ *... und dadurch dass man auch hier so Ausnahmefälle hat, indem man vielleicht anders zieht als man sollte*“.

c) In Passage Nr. 2, Aufgabe Blumenmuster, Abschnitt #1, 0:00−2:30, will Anne zunächst eine Bedingung augenscheinlich möglichst gut umsetzen. Dann übermittelt sie Tangentialbedingungen und fragt „*Hab ich die zwei schon?*“.

d) In Passage Nr. 2, Aufgabe Blumenmuster, Abschnitt #3, 4:07−7:29, gibt Geometry Expressions die Fehlermeldung aus, dass logische Bedingungen nicht vereinbar sind.

e) In Passage Nr. 2, Aufgabe Blumenmuster, Abschnitt #3, 4:07−7:29 fordert der Interviewer zweimal die Probandin explizit auf, an der Konfiguration zu ziehen.

f) In Passage Nr. 3, Eigenmann-Aufgabe Nr. 78, Abschnitt #1, 0:00−2:20, setzt Lara-Marie die Konfiguration mit Geometry Expressions nach einer anfänglichen Interpretationsschwierigkeit des Aufgabendiagramms zügig um.

g) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #5, 3:07−6:10 kann weder die Probandin noch der Interviewer am Punkt G in der Konfiguration von Geometry Expressions ziehen, obwohl das in einem RGS theoretisch möglich sein sollte.

h) In Passage Nr. 5, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #5, 1:31−2:02, übermitteln beide Probandinnen in Geometry Expressions nacheinander die Bedingungen, dass alle Seiten gleich lang sein sollen. Der Zugmodus wird zwischendurch verhalten benutzt. Elena sagt: „*Tada, ein Quadrat*“. Der Interviewer fordert dann explizit auf, an der Konfiguration zu ziehen. Dann artikulieren die Probandinnen, dass es sich bei dem Viereck um eine Raute handelt.

i) In Passage Nr. 6, Eigenmann-Aufgabe Nr. 51 (II), Abschnitt #1, 0:56 − 1:34 werden die Eigenschaften an das Viereck mit Geometry Expressions problemlos übermittelt.

Wir verdichten diese Beobachtungen zu Hypothesen:

(H1) Probanden können Konfigurationen in einem RGS durch das Setzen von Bedingungen zügig erzeugen.

(H2) Probanden neigen bei der Umsetzung einer Konfiguration mit RGS dazu, alle nötigen Bedingungen zu übermitteln, ohne dazwischen den Zugmodus zu benutzen.

Theoretische Analyse der Hypothese (H1)

a) Die Hypothese (H1) wird theoretisch unterfüttert.

RGS ist aus den CAD-Systemen entstanden genau aus dem Grund, das Konstruieren zu vereinfachen. So reduziert ein RGS die Dreieckskonstruktion SSS auf Bedienerwissen: Ein Benutzer erstellt ein beliebiges Dreieck und übermittelt dann die gewünschten Streckenlängen in Form von drei Bedingungen.

b) Die Hypothese (H1) wird theoretisch angegriffen.

Die Aussage trifft nicht zu, wenn Probanden auf softwarespezifische Probleme stoßen. Das beginnt bereits damit, dass Geometry Expressions Winkel nicht im Gradmaß, sondern im Bogenmaß erwartet. Außerdem kann es vorkommen, dass sich bei der gewünschten Komposition eines Dreiecksinkreises ein Dreiecksankreis ergibt, wenn sich der Kreis nicht hinreichend innerhalb des Dreiecks befindet. Gravierender ist der Fall, wenn Geometry Expressions logisch vereinbare Bedingungen nicht akzeptiert. In diesen Fällen kann nicht behauptet werden, dass Probanden eine Konfiguration zügig erzeugen.

Theoretische Analyse der Hypothesen (H2)

a) Die Hypothese **(H2)** wird theoretisch unterfüttert.

Beim händischen Arbeiten mit Zirkel und Lineal gibt es kein Pendant zum Zugmodus, es sei denn, man würde ein „Daumenkino“ bestehend aus vielen verschiedenen Bildern einer Konfiguration benutzen, was aber lediglich eine ganz bestimmte Art eines Zuges widergibt. Eine Geometriesoftware hingegen ermöglicht durch den Zugmodus bewegte Geometrie, das ist im Vergleich zu Papier eine neue Erfahrung. Daher gibt es für Lernende ohne Vorerfahrung keinen Anlass, den Zugmodus zu benutzen. Außerdem sagt Selina in Beobachtung b), dass man „*hier* [in Geometry Expressions] *so Ausnahmefälle hat, indem man vielleicht anders zieht als man sollte*.“. Sie gibt dazu das Beispiel eines Vierecks, das sie ganz klein macht. Das wäre in EUKLID DynaGeo zwar genauso, aber für mich deutet ihre Aussage auf eine gewisse Hemmung hin, den

Zugmodus sorgenfrei zu benutzen, denn vielleicht geht ja was „kaputt“ dabei und kann nicht mehr einfach rückgängig gemacht werden so wie die Konfiguration des Dreiecksinkreises, der zum Ankreis wechselt.

Welche Schwierigkeiten Lernende bei der Benutzung des Zugmodus (in einem DGS) haben, wurde bereits von TALMON und YERUSHALMY untersucht:

> *„Junior high students and graduate students in mathematics education were asked to predict the DB[14] of points that were part of a geometric construction they had executed using a DGE according to a given procedure, and to explain their predictions. The study reveals that while hierarchy in geometric constructions in a DGE is mirrored by the DB, user actions and perceptions of DB indicate that users often grasp a reverse hierarchy in which dragging a child affects its parent."* [Talmon/Yerushalmy04, S. 91]

b) Die Hypothese **(H2)** wird theoretisch angegriffen.

   Eine Einstellungsvoraussetzung der Probanden lautete, dass sie keine Vorerfahrung mit Geometriesoftware hatten. Daher ist es möglich, dass die Eingewöhnungszeit zu kurz war, um den Sinn des Zugmodus zu erkennen und das Konzept des Freiheitsgrades zu übernehmen. Außerdem wurde die Aufforderung des Ziehens nicht explizit in den Aufgabenstellungen formuliert. Folglich ist es an dieser Stelle früh, bereits zu schlussfolgern, dass Probanden zwischen dem Übermitteln der Bedingungen den Zugmodus nicht benutzen.

Annahme, Modifizierung oder Ablehnung der Hypothesen

Der Einwand der softwarespezifischen Probleme und der Vorerfahrung muss für die Praxis berücksichtigt werden, daher werden beide Hypothesen leicht modifiziert angenommen:

(H1‘) Probanden können Konfigurationen in einem RGS durch das Setzen von Bedingungen zügig erzeugen, solange keine softwarespezifischen Probleme in der oben genannten Art auftreten.

(H2‘) Probanden mit wenig RGS-Erfahrung neigen bei der Umsetzung einer Konfiguration dazu, alle nötigen Bedingungen zu übermitteln ohne dazwischen den Zugmodus zu benutzen.

4.5.2 Wie kommen Lernende mit dem Konzept Bedingungen setzen innerhalb der Umgebung von Geometry Expressions zurecht?

Wir sichten und interpretieren die folgenden Beobachtungen aus der Transkription.

a) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #2, 3:36−8:12 beantworten die Probandinnen die Frage des Interviewers gegensätzlich: Beatrice sagt, dass man bei der Werkzeugpalette Constraint schauen muss, Selina hingegen sagt bei Construct.

[14] Die Abkürzung DB steht für *dynamic behavior*, die Abkürzung DGE für *dynamic geometry environment*.

b) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 8:13−9:37 verwendet die Probandin das Wort „*zeichnen*“ sowohl im Kontext von EUKLID DynaGeo als auch von Geometry Expressions.

c) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #4, 10:43−11:58 verwenden beide Probandinnen während der Benutzung von EUKLID DynaGeo das Wort „*festlegen*“. Eine Probandin formuliert weiter „*Warum haben wir es hier konstruiert?*“. Anschließend tippt Selina „a“ ein als sie nach der festzulegenden Länge gefragt wird, woraufhin EUKLID DynaGeo eine Fehlermeldung ausgibt.

d) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #5, 13:00−14:59 möchte Selina die Strecken des Vierecks der Reihe nach festlegen, um ein Quadrat zu erstellen. Am Ende produziert sie damit einen zirkulären Bezug: „*Strecke fester Länge kann nicht erzeugt werden, weil dabei [unverständlich] Verwandtschaftsbeziehung entstehen würde.*“

e) In Passage Nr. 2, Aufgabe Blumenmuster, Abschnitt #1, 0:00−2:30 will Anne in Geometry Expressions die Kreise augenscheinlich möglichst gut tangential zueinander setzen. Im weiteren Verlauf weiß sie dann später nicht, welche Bedingungen sie bereits gesetzt hat.

f) In Passage Nr. 3, Eigenmann-Aufgabe Nr. 78, Abschnitt #2, 5:33−6:31 gibt Lara-Marie während der Verwendung von EUKLID DynaGeo zu Protokoll „*Ich wollte ah ja die Tangente muss ich ja ich muss ja jetzt sagen, dass es die Tangente ist*.“ Das lässt erkennen, dass sie Tangentialbedingungen übermitteln will.

g) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #3, 0:51−2:17 öffnet Tina Geometry Expressions und erzeugt ein Dreieck. Auf die Frage des Interviewers, was sie jetzt tut, antwortet sie „*die Mittelsenkrechten*“.

h) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #5, 3:07−6:10 fragt der Interviewer mit Blick auf die Konfiguration in Geometry Expressions, ob auch am Punkt G gezogen werden kann, worauf Natalie antwortet: „*Ich glaub nicht so einfach, weil die sind ja abhängig von den anderen.*“

i) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #6, 6:11−8:59, fragt der Interviewer wie die Probandinnen die Konfiguration Dreieck und Umkreis erstellen würden, wenn sie Bedingungen übermitteln würden. Daraufhin fragt Natalie: „*Ja also jetzt mit EUKLID dann?*“

j) In Passage Nr. 7, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #1, 2:59−3:21 weist Jennifer in EUKLID DynaGeo mit dem Werkzeug Strecke fester Länge einer Strecke den Wert „a“ zu. Es erscheint eine Fehlermeldung. Daniela sagt, dass das mit der Software nicht möglich ist und fügt fragend hinzu, dass das mit der anderen möglich ist.

k) In Passage Nr. 7, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 7:32−8:59 fragt Jennifer während der Benutzung von Geometry Expressions Daniela nach den Mittelsenkrechten. Die Probandinnen übermitteln der Anfangsstrecke die Länge a und konstruieren danach mit Kreisen weiter.

Wir verdichten diese Beobachtungen zu Hypothesen.

(H3) Probanden benutzen bei der Umsetzung einer Konfiguration Konstruktionswerkzeuge von Geometry Expressions.

(H4) Probanden versuchen mit EUKLID DynaGeo Bedingungen umzusetzen.

Theoretische Analyse der Hypothese (H3)

a) Die Hypothese (H3) wird theoretisch unterfüttert.

   Konstruktionswerkzeuge wie Zirkel und Lineal liegen näher an den haptischen Vorerfahrungen der Probanden als das Konzept der Bedingungen. Es ist anschaulich, mit einem Zirkel einen Kreis zu schlagen, sowohl in der Realität als auch in einer Softwareumgebung. Hingegen ist es abstrakter, zwischen erstellten Objekten Bedingungen zu übermitteln, die zu einer Änderung der Konfiguration führen wie zum Beispiel bei einer Geraden, die zur Tangente an einen Kreis wird.

b) Die Hypothese (H3) wird theoretisch angegriffen.

   Die Hypothese ist mit Blick auf die Transkription der ausgewählten Interviewpassagen schwer anzugreifen, aber Probanden benutzen bei der Umsetzung einer Konfiguration ebenfalls relationale Werkzeuge.

Theoretische Analyse der Hypothese (H4)

a) Die Hypothese (H4) wird theoretisch unterfüttert.

   EUKLID DynaGeo verfügt über relationale Werkzeuge wie zum Beispiel *Strecke fester Länge* und *Punkt auf Linie*. Diese sind nicht als solche ausgezeichnet, sondern befinden sich in denselben Reitern wie die reinen Konstruktionswerkzeuge. Daher fällt es Probanden ohne Vorerfahrung tendenziell schwer, diese Konzepte zu unterscheiden und sie wollen diese in gleicher Weise benutzen.

b) Die Hypothese (H4) wird theoretisch angegriffen.

   Es mag zutreffen, dass Probanden im DGS EUKLID DynaGeo Bedingungen umsetzen und umsetzen wollen, aber es ist an dieser Stelle unklar, ab das eine **bewusste** Entscheidung ist. Die Kombination der Verfügbarkeit von relationalen Werkzeugen im DGS EUKLID und von Konstruktionswerkzeugen im RGS Geometry Expressions erschweren eine sichere Diagnose der Ursachen. Um der Frage auf den Grund zu gehen ist mindestens eine weitere Untersuchung nötig, in denen Probanden nur ein DGS zur Verfügung gestellt wird.

Annahme, Modifizierung oder Ablehnung der Hypothesen

Die Hypothesen (H3) und (H4) werden mit Blick auf die Verdichtungen der Transkription angenommen. Um Ursachen für und Verschärfungen von (H3) und (H4) zu prüfen, sind Softwareprogramme nötig, in denen die Konzepte zeichnen, konstruieren und Bedingungen setzen, strikt getrennt sind. Als Kombination beider Hypothesen lässt sich formulieren: Probanden ohne Vorerfahrung haben im Umgang mit einer Geometriesoftware Probleme, die beiden Konzepte konstruieren und Bedingungen zu setzen sicher zu unterscheiden.

4.5.3 Können Lernende geeignete Werkzeuge innerhalb einer Software-Umgebung auswählen, um ein vorgegebenes Problem zu lösen?

Wir sichten Beobachtungen aus der Transkription.

a) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 8:13 – 9:37 verwendet Beatrice das Wort „*zeichnen*“ im allgemeinen Kontext von Geometriesoftware.

b) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 8:13 – 9:37 sagt Selina: „*Für mich ist eigentlich das ähm DynaGeo leichter handzuhaben als das hier weil das mit diesen Bedingungen und ähm verschiedenen Abteilungen etwas verworrener ist für mich …*“.

c) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #4, 10:43 – 11:58 verwenden beide Probandinnen während der Benutzung von EUKLID DynaGeo das Wort „*festlegen*“. Eine Probandin formuliert weiter „*Warum haben wir es hier konstruiert?*“. Anschließend tippt Selina „a“ ein als sie nach der festzulegenden Länge gefragt wird, woraufhin EUKLID eine Fehlermeldung ausgibt.

d) In Passage Nr. 1, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #5, 13:00 − 14:59 möchte Selina die Strecken des Vierecks der Reihe nach festlegen, um ein Quadrat zu erstellen. Am Ende produziert sie damit einen zirkulären Bezug: „*Strecke fester Länge kann nicht erzeugt werden, weil dabei [unverständlich] Verwandtschaftsbeziehung entstehen würde.*“

e) In Passage Nr. 2, Aufgabe Blumenmuster, Abschnitt #1, 0:00 − 2:30 will Anne in Geometry Expressions die Kreise augenscheinlich möglichst gut tangential zu-einander setzen. Im weiteren Verlauf weiß sie dann später nicht, welche Bedingungen sie bereits gesetzt hat.

f) In Passage Nr. 3, Passage Nr. 3, Eigenmann-Aufgabe Nr. 78, Abschnitt #2, 5:33 – 6:31 gibt Lara-Marie während der Verwendung von EUKLID DynaGeo zu Protokoll „*Ich wollte ah ja die Tangente muss ich ja ich muss ja jetzt sagen, dass es die Tangente ist*.“ Das lässt erkennen, dass sie Tangentialbedingungen übermitteln will.

g) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #3, 0:51−2:17 öffnet Tina Geometry Expressions und erzeugt ein Dreieck. Auf die Frage des Interviewers, was sie jetzt tut, antwortet sie „*die Mittelsenkrechten*“.

h) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #6, 6:11−8:59, fragt der Interviewer wie die Probandinnen die Konfiguration Dreieck und Umkreis erstellen würden, wenn sie Bedingungen übermitteln würden. Daraufhin fragt Natalie: „*Ja also jetzt mit EUKLID dann?*“

i) In Passage Nr. 4, Aufgabe Umkreismittelpunkt, Abschnitt #7, 9:15−9:48, hat Natalie Schwierigkeiten zu erkennen, welche Werkzeuge sie in Geometry Expressions aktuell aufrufen kann: „*Okay, ich konnt's nicht genau erkennen. Also das Symbol weil das dann so durch die Farben*.“

j) In Passage Nr. 7, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #1, 2:59−3:21 will Jennifer in EUKLID DynaGeo einer Strecke den Wert a zuweisen.

k) In Passage Nr. 7, Aufgabe Quadrat, Abschnitt #3, 7:32-8:59 fragt Jennifer während der Benutzung von Geometry Expressions Daniela nach den Mittelsenkrechten. Die Probandinnen übermitteln der Anfangsstrecke die Länge a und konstruieren danach mit Kreisen weiter.

Wir verdichten diese Beobachtungen zu einer Hypothese:

(H5) Probanden fällt es innerhalb einer Software-Umgebung schwer, geeignete Werkzeuge auszuwählen, um ein vorgegebenes Problem zu lösen.

Theoretische Analyse der Hypothese (H5)

a) Die Hypothese wird theoretisch unterfüttert.

   In den Interviews hat sich mehrfach gezeigt, dass Probanden bei der Umsetzung einer Konfiguration dazu neigen, mit Geometry Expressions Konstruktionswerkzeuge anzuwenden und bei der Umsetzung mit EUKLID DynaGeo Bedingungen benutzen bzw. benutzen wollen. Das deutet auf ein Verständnisproblem hin, zwischen dem dynamischen Konstruieren und dem Setzen von Relationen sicher zu unterscheiden. Das passt zu Selinas Aussage „*Für mich ist eigentlich das ähm DynaGeo leichter handzuhaben als das hier weil das mit diesen Bedingungen und ähm verschiedenen Abteilungen etwas verworrener ist für mich …*“

b) Die Hypothese wird theoretisch angegriffen.

   Die Annahme oder Ablehnung der Hypothese hängt davon ab, wie das vorgegebene Problem konkret aussieht. Die Interview-Aufgaben wurden nicht völlig streng nach Schwierigkeitsstufen kategorisiert. Des Weiteren wurden Probanden nur allgemein danach gefragt, warum sie sich für dieses oder jenes Programm entschieden haben. Und schließlich war die Probandengruppe nicht hinreichend homogen.

Annahme, Modifizierung oder Ablehnung

Die Hypothese (H5) wird basierend auf der Sicherung der Hypothesen (H3) und (H4) angenommen.

4.6 Reflexion und verbessertes Setting

Während der Interviews und beim Anfertigen dieser Dissertation ist mir bewusst geworden, wie schwierig es ist, **objektiv** zu sein. Den Hauptgrund dafür sehe ich in der zeitlich nahe zusammenliegenden Rollenkombination Lernender/Lehrender. Zuerst war ich bzgl. RGS ein Lernender und als Lernender sieht man sich zuerst mit seinen eigenen Erwartungen und Schwierigkeiten konfrontiert, die bei anderen Lernenden anders sein können. Außerdem ist mir bewusst geworden, wie schwierig es ist, **unvoreingenommen** zu sein, um sachlich interpretieren und schlussfolgern zu können. Diese Aussage möchte ich mit einem Beispiel aus der Internet-Folklore veranschaulichen. Bitte betrachten Sie dazu das nächste Bild:

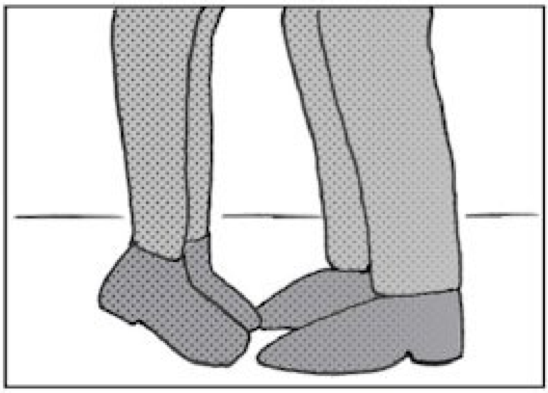


Abbildung 139: Was sehen Sie?[15]

Lassen Sie die Situation des Bildes einen Moment lang auf sich wirken. Gleich sehen Sie, was passiert:

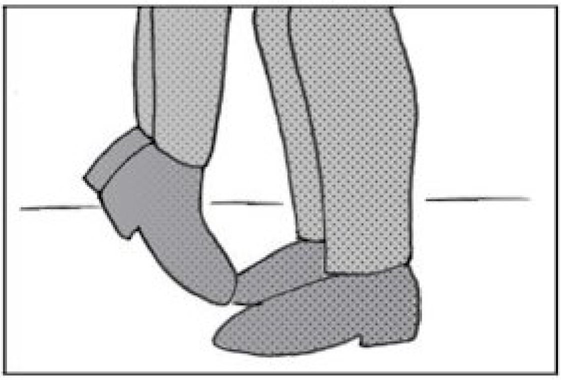


Abbildung 140: Die Situation entwickelt sich ...

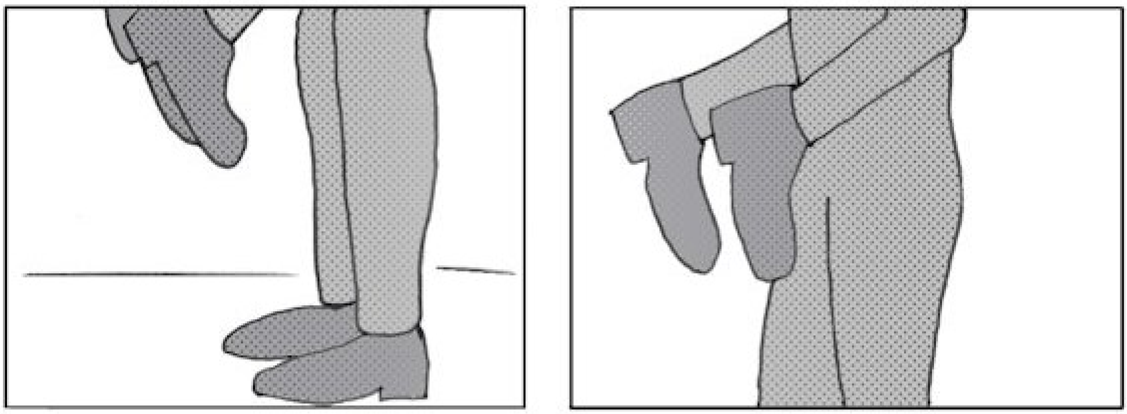


Abbildung 141: ... und löst sich auf.

Es handelt sich hier also um **eine** Person, die zwei Paar Schuhe trägt: ein Paar an den Füßen und das zweite Paar an den Händen. An diesem Beispiel sehen wir erstens die menschliche Tendenz, grundsätzlich Situationen zu interpretieren und zweitens, dass eine Interpretation von den Vorerfahrungen, den Erwartungen und dem Blickwinkel abhängt. Eine breite Darstellung von Denkfallen und Paradoxa finden Sie auf den Internetseiten von [Grams16].

[15] Die Skizzen hat mir freundlicherweise Herr Manfred Rauter angefertigt.

Verbessertes Design und verbessertes Setting

1. Manche Forschungsfragen waren in der ersten Version zu weit und zu vage formuliert. Es ist sinnvoll, kleinere Brötchen zu backen, also möglichst konkrete Fragen zu untersuchen, anderenfalls kommt man vom Hundertsten ins Tausendste. U. ECO formuliert in seinem Ratgeber [Eco10] auf erfrischende Art:

   „*Das Thema Geologie beispielsweise ist zu weit. Vulkanologie, als Zweig der Geologie, ist noch zu umfassend. […] Ein noch engeres Thema, das einen kleineren Zeitraum erfasst, wäre: Der Ausbruch und das scheinbare Erlöschen des Paricutin (vom 20. Februar 1943 bis zum 4. März 1952). Was mich betrifft, ich würde zum letzten Thema raten. Unter der Bedingung, dass der Kandidat wirklich alles bringt, was es über diesen verflixten Vulkan zu sagen gibt.*“ [Eco10, S. 18]

2. Zwei praktische Forschungsfragen überschneiden sich inhaltlich: (F1) ist in gewisser Weise eine übergeordnete Frage bezüglich (F2). Dadurch entsteht die Doppeldeutigkeit, Hypothesen beiden Forschungsfragen zuzuordnen, was dazu führen kann, dass andere Forscher aus der Transkription des Datenmaterials andere Ergebnisse erhalten. Folglich sollten Forschungsfragen grundsätzlich inhaltlich getrennt sein, um größtmögliche Reproduzierbarkeit zu gewährleisten.

3. Idealerweise sollten Softwarevertreter benutzt werden, in dem die relationalen und funktionalen Werkzeuge sichtbar getrennt sind. Mit einer solchen Trennung würden Probanden darin unterstützt, diese Konzepte zu unterscheiden, dementsprechend wäre die Untersuchung von diesem Störfaktor befreit.

4. Ein Vergleich zweier Softwareprogramme ist prinzipiell reibungsbehaftet, da es viele Parameter gibt, die sich überschneiden und interagieren: Vielleicht ist das Design der einen für Probanden schöner anzuschauen als das der anderen Software. Dementsprechend sollten Probanden darüber befragt werden, um nicht vorschnell Vermutungen bzgl. Tendenzen zur Bevorzugung aufzustellen. Außerdem könnte man sich in einer künftigen Untersuchung auf ein einzelnes RGS beschränken oder vergleichen, wie Probanden zwei verschiedene RGS benutzen, mit oder ohne Fokus auf eine mögliche Algebra-Schnittstelle.

5. Das Verhalten der Probanden im Umgang mit der Software sollte nicht nur auf Video, sondern auch innerhalb der Bildschirmumgebung aufgezeichnet werden. Auf diese Weise lässt sich eine Analyse des Benutzerverhaltens genauer durchführen als mit einer einzigen Aufzeichnung auf Video.

6. Alle Probanden erhalten die gleichen Aufgaben in der gleichen Reihenfolge. Diese Vereinheitlichung hat den Vorteil, dass sich die Vergleichbarkeit der Interviews erhöht, aber den möglichen Nachteil, nicht individuell auf das Leistungsniveau der Probanden einzugehen. Ideal wäre natürlich eine homogene Probandengruppe, die sich allerdings in der Praxis nur schwer akquirieren lässt.

7. Der Interviewer soll sich vor Beginn der Interviews von seiner Rolle als Lehrkraft distanzieren: Es geht nicht darum, einen Sachverhalt zu vermitteln, sondern die Gedanken der Probanden möglichst ungefiltert zu Tage zu fördern.

8. Der Ansatz, jeweils zwei Probanden zu interviewen, lag darin, dass diese miteinander ins Gespräch kommen und so natürlicherweise ihre Gedanken offen legen. Allerdings

muss dabei mit dem Phänomen gerechnet werden, dass ein leistungsschwächerer Proband sich dem leistungsstärkeren Partner-Probanden unterordnet, das heißt, dass er nur vorsichtig eine abweichende Meinung artikuliert oder sich allgemein passiv verhält. Bei einem Einzelinterview gibt es eine solche Interaktion natürlich nicht, aber das laute Denken bekäme eine künstliche Note und müsste durch den Interviewer fortwährend durch Fragen initiiert werden.

9. Der erste direkte Kontakt von Probanden ohne Vorerfahrung mit der Software findet in den Übungsphasen der Softwareschulung statt. Dementsprechend wertvoll sind Beobachtungen, die dort gemacht werden. Meiner Meinung nach würden Videoaufnahmen entspanntes Lernen stören, aber die angefertigten Softwaredateien der Probanden könnten untersucht werden.

10. Um die Vergleichbarkeit von Software-Einführungen besser zu gewährleisten, sollte Fachwissen jeweils einheitlich dargestellt werden: Wird zum Beispiel ein mathematischer Satz in der einen Einführung dargestellt, so sollte er genauso in der anderen Einführung dargestellt werden. Alternativ dazu könnte man den nötigen Lehrstoff zuerst in einer getrennten Sitzung ohne Software vermitteln und sich dann sich bei den Software-Einführungen auf deren Benutzung beschränken.

11. MAYRING führt mit Bezug auf [Klüver79] und [Heinze/Thiemann82] mehrere Gütekriterien einer Inhaltsanalyse aus. Hier sei die kommunikative Validierung hervorgehoben:

    „*Der Grundgedanke dabei ist, eine Einigung bzw. Übereinstimmung über die Ergebnisse der Analyse zwischen Forschern und Beforschten diskursiv herzustellen.*“ [Mayring10, S. 120]

    Nach HEINZE und THIEMANN [Heinze/Thiemann82, S. 641] ist die kommunikative Validierung dementsprechend nicht objektivistisch, gleichwohl kommen hier beide Parteien nochmals für einen Austausch zusammen. Meiner Meinung nach sollte hier der Forscher nicht mit einer akademischen Präsentation seiner Ergebnisse einsteigen, sondern mit den Probanden ins Gespräch kommen. Noch besser ist: Die Probanden kommen zuerst miteinander ins Gespräch.

4.7 Handlungsempfehlungen für die Praxis

Wir stellen die aus den Interviews gewonnenen Erkenntnisse in Form von Empfehlungen zusammen. Als Erstes formulieren wir Empfehlungen für Benutzer[16] von RGS, danach Empfehlungen für Lehrende mit Unterrichtsinhalt RGS.

Handlungsempfehlungen für Benutzer von RGS

1. Das Setzen einer Bedingung und die Benutzung des Zugmodus sollen sich abwechseln.

2. Bei der Umsetzung einer Konfiguration sollten Objekte so erzeugt und platziert werden, dass nicht missverständlich (noch) nicht vorhandene Relationen hinein interpretiert werden.

[16] Lehrende sind ebenfalls Benutzer und sollten mit gutem Beispiel vorangehen.

3. Für das Explorieren von Relationen sollen die zugehörigen Objekte erst bewusst ausgewählt werden, danach soll geprüft werden, ob die ausgewählten Objekte in einer Relation zueinander stehen.

4. Die Option eines Medienwechsels, zum Beispiel von Software hin zu Papier sollte immer offen gehalten werden.

Begründung der Regeln und erläuternde Beispiele

1. Wird eine Bedingung gesetzt, so bietet der Zugmodus die ideale Probe, um sicherzustellen, dass die Bedingung korrekt umgesetzt wurde: Der Benutzer „wackelt“ an der Konfiguration und überprüft augenscheinlich oder durch Messen, ob die Bedingung erhalten bleibt. Des Weiteren reduzieren sich durch die schrittweise Hinzunahme von Bedingungen die Möglichkeiten, die Konfiguration im Zugmodus zu verändern. Die erste Regel ist daher grundlegend für das Erfahren des Konzeptes des Freiheitsgrades. Dieses Erfahren wird begünstigt durch das Vergleichen der Konfigurationen vor dem Setzen und nach dem Setzen einer Bedingung. In den Videos ist ersichtlich, dass Probanden oft mehrere Bedingungen hintereinander ausgeführt haben, ohne zwischendurch den Zugmodus zu benutzen. Auf diese Weise hatten Elena und Irmgard bei der Aufgabe „Quadrat“ zunächst den falschen Eindruck, dass es sich bei einem Viereck mit vier gleich langen Seiten zwangsläufig um ein Quadrat handeln müsste. Hätten beide Probanden die obige erste Regel befolgt, dann hätten sie gleich zu Beginn merken können, dass sich nicht zwangsläufig ein Quadrat ergibt:

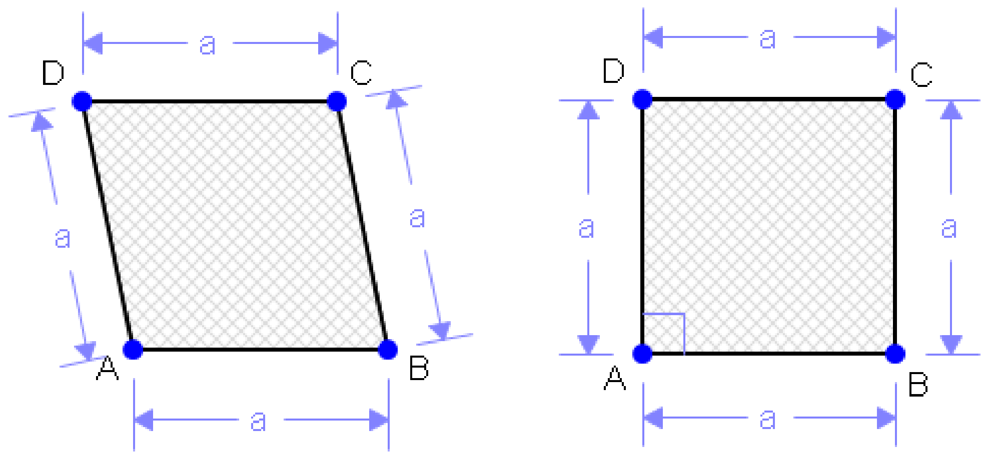


Abbildung 142: Ein Viereck mit vier gleich langen Seiten ist nicht zwangsläufig ein Quadrat.

Diese Fehlvorstellung wurde weiter dadurch begünstigt, dass beide Probanden mit einem zu speziellen Viereck die Exploration begonnen hatten: Das Ausgangsviereck war zu sehr einem Quadrat ähnlich. Das führt uns zu der zweiten Regel.

2. Die zweite Regel soll vor falschen Schlussfolgerungen schützen und ist daneben hilfreich für die praktische Umsetzung einer Konfiguration. Ist etwa verlangt, den Inkreis eines Dreiecks zu erstellen, und beginnt ein Benutzer mit einem Dreieck und einem Kreis innerhalb des Dreiecks, so soll der Kreis beim Erstellen **nicht** möglichst gut tangential platziert werden, um genau diesen falschen Eindruck zu vermeiden. Zu diesem Aspekt korrespondiert das bekannte Phänomen der auseinander fallenden Konstruktionen in einem DGS, wenn ein Benutzer freie Punkte augenscheinlich möglichst gut platziert, ohne dass ein funktionaler Zusammenhang entsteht.

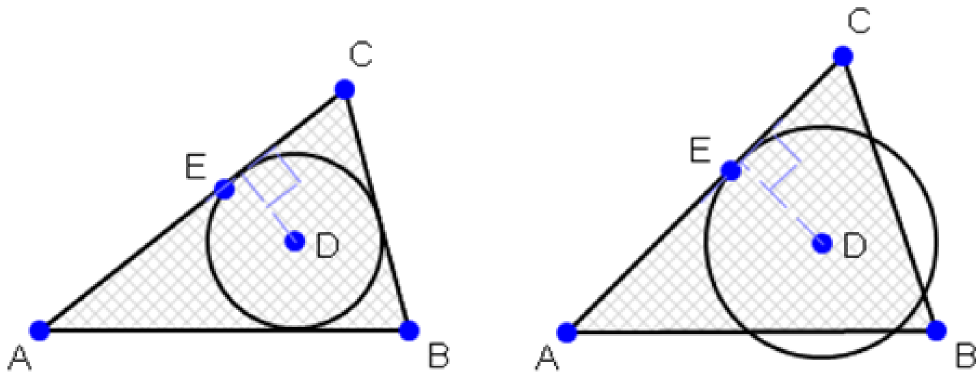


Abbildung 143: Ein Kreis wird möglichst gut als Inkreis platziert (links). Im Zugmodus zeigt sich, dass nur eine Tangentialbedingung gesetzt wurde (rechts).

3. Die dritte Regel gibt eine gewisse Struktur vor beim Explorieren einer Konfiguration und betont das relationale Denken. Zur Veranschaulichung betrachten wir die Konfiguration einer gemeinsamen äußeren Tangente an zwei Kreise:

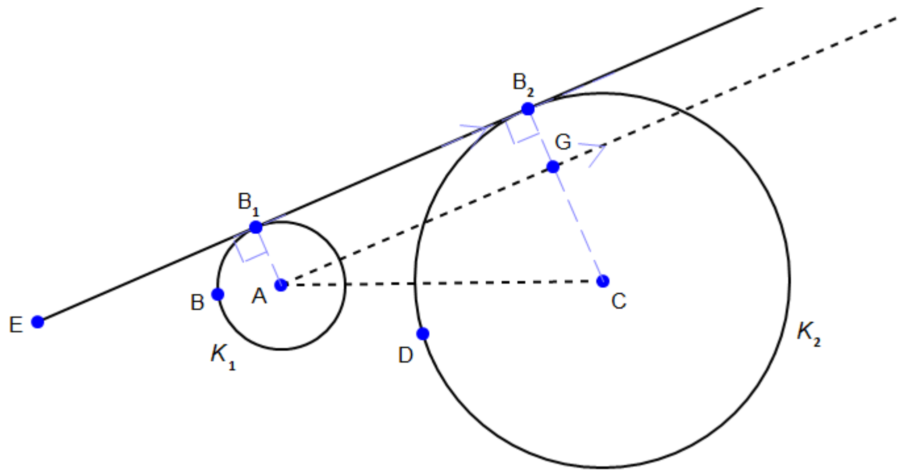


Abbildung 144: Die Konfiguration besteht aus zwei Kreisen und einer gemeinsamen Tangente.

Als Hilfslinien sind in die gestrichelten Strecken $\overline{AC}$ und die Strecke $\overline{AG}$ ergänzt. Dies geschieht mit Blick auf die mögliche Problemlöseaufgabe, die Konstruktion einer gemeinsamen Tangente an zwei Kreise zu finden. Ein Lernender kann mit dieser Hilfestellung prüfen, ob folgende Relationen gelten:

- Sind die Strecken $\overline{AB_1}$ und $\overline{CB_2}$ parallel zueinander?
- Sind die Strecken $\overline{AG}$ und $\overline{EB_2}$ parallel zueinander?
- Welche Beziehung gilt für die Streckenlängen $|\overline{AB_1}|$, $|\overline{CG}|$ und $|\overline{GB_2}|$?

Damit ist die erste Etappe der Lösungsfindung bewältigt. Entscheidend ist nun die Erkenntnis, dass der Winkel bei G ein rechter ist und daran anschließend die Frage, mit welchem Satz man rechte Winkel konstruiert.

4. Mit einem RGS können zwar Konfigurationen komfortabel erzeugt werden, aber eine Fragestellung muss nicht zwangsläufig bis zum Finden einer Antwort durchgehend mit dem RGS bearbeitet werden. So könnte man bei der obigen Konfiguration in Abbildung 144 das RGS benutzen, um die Konfiguration schnell zu erstellen, diese dann ausdrucken und auf Papier weiterarbeiten.

Empfehlungen für Lehrende mit Unterrichtsinhalt RGS

1. Bei der Einführung eines RGS muss genügend Zeit eingeplant werden, die Konzepte Zeichnen, Konstruieren und das Setzen von Relationen einzuführen und voneinander abzugrenzen.

2. Fragestellungen, die mit einem RGS zu stark trivialisiert werden, sollten vermieden werden.

3. Ein RGS, das logisch vereinbare Einschränkungen nicht akzeptiert, halte ich für die den Praxiseinsatz problematisch. Lehrende sollten deshalb darauf achten, dass es nicht zu solchen Ausnahmesituationen kommt.

4. Lehrkörper sollten wissen, wenn eine Konfiguration mehrere Lösungen besitzt und wie das RGS mit einer Mehrdeutigkeit umgeht.

5. Der Einsatz des RGS soll zusammen mit der jeweiligen Aufgabenstellung zu Konfigurationen führen, die zum Erkunden hinreichend stabil sind.

6. Allgemein sollten Lehrkörper beim Einsatz von Software darauf hinwirken, dass Lernende Ordnung in ihrem Werkzeugkoffer halten: Wenn es bei der Software möglich ist, Werkzeuge auszublenden und nach Priorität anzuordnen, dann sollte das genutzt werden.

Begründung der Empfehlungen und erläuternde Beispiele

1. In den aktuellen DGS wie GeoGebra existieren relationale Werkzeuge, aber diese werden weder explizit als solche bezeichnet noch systematisch angeordnet. Damit werden die beiden Konzepte Konstruieren und Relationen setzen in einen Topf geworfen, was bei Lernenden zu Verwirrung führt. In den Videos hat sich ja mehrfach gezeigt, dass Probanden die Konzepte Konstruieren und Relationen setzen miteinander verwechseln: Einerseits wollten Probanden mit einem DGS Bedingungen umsetzen, zum Beispiel durch dreimalige Anwendung des Werkzeugs *Strecke fester Länge* bei der Dreieckskonstruktion SSS oder durch den Wunsch, eine Strecke möge tangential zu einem Kreis liegen, andererseits haben Probanden ausgiebig mit Geometry Expressions konstruiert, ohne die Möglichkeit zu nutzen, Bedingungen zu setzen. Die **Trennung dieser Konzepte** zu Beginn des Lernweges sollte sich positiv auf das Verständnis auswirken. Lernenden muss darüber hinaus als erstes vermittelt werden, dass mit einem Geometrieprogramm **nicht** gezeichnet wird.
   Die konsequente Trennung beider Konzepte stößt in der Praxis an Grenzen: So verfügt in einem real existierenden RGS ein Benutzer über Möglichkeiten, aus bereits existierenden Objekten neue Objekte zu erzeugen, also streng genommen zu konstruieren. Das ist praktisch sinnvoll. Ohne diese DGS-Möglichkeit ist zum Beispiel die Erstellung des Mittelpunktes einer gegebenen Strecke zwischen zwei Punkten A und B etwas langatmig: Zuerst müsste der Benutzer einen weiteren Punkt M erzeugen und dann die Bedingungen formulieren, dass M auf der Strecke $\overline{AB}$ liegen soll und der Abstand der Punkte A und M gleich dem Abstand der Punkte M und B sein soll.

2. Fragestellungen, die mit einem RGS zu stark trivialisiert werden, enden schnell in einer didaktischen Sackgasse. So wird zum Beispiel die klassische Dreieckskonstruktion SSS in einem RGS durch wenige Mausklicks umgesetzt, vgl. Abbildung 69. Ein weiteres Beispiel wird gegeben durch die klassische Konstruktion der Tangente an einen Kreis durch

einen Punkt P. Die zugehörige Konfiguration wird mit einem RGS durch eine Tangentialbedingung zwischen einer Strecke und einem Kreis umgesetzt.

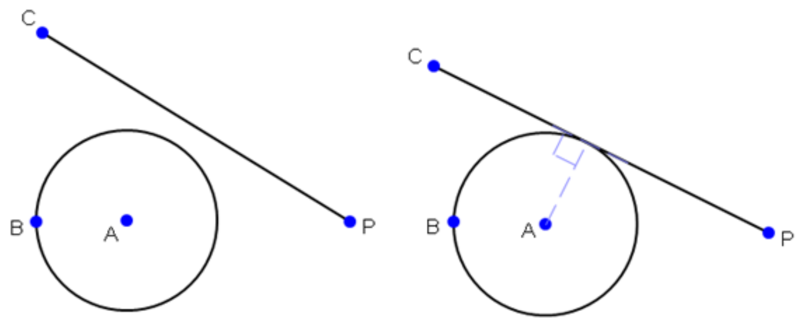


Abbildung 145: Mit wenigen Mausklicks wird die Strecke (links) zur Tangente (rechts).

Gleichwohl kann eine umgesetzte Konfiguration dann Ausgangspunkt für Explorationsfragen sein. Im nächsten Kapitel gehen wir auf Aufgaben für relationales Denken und RGS ein.

3. Wir greifen ein Beispiel aus der Einführung von Geometry Expressions wieder auf: Wir erzeugen einen Punkt A und setzen dessen Koordinaten auf $(0|0)$ fest. Die Länge der Verbindungsstrecke zu einem weiteren Punkt B werde auf 3 gesetzt. Dann lässt sich B auf einer Kreisbahn um A drehen.

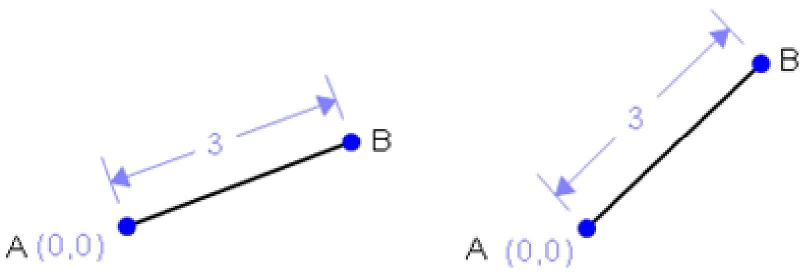


Abbildung 146: Mit den Einschränkungen lässt sich der Punkt *B* auf einer Kreisbahn um *A* bewegen.

Wenn man nun die x-Koordinate von B auf 3 festlegen will, dann akzeptiert Geometry Expressions das nicht, obwohl dies algebraisch möglich wäre, vgl. Abbildung 90 auf S. 81. Das ist für einen Benutzer kaum nachvollziehbar, da er alles logisch korrekt ausführt.

4. Als Beispiel einer mehrdeutigen Konfiguration betrachten wir die Dreieckskonfiguration SSW mit $b = 4\ cm$, $c = 6\ cm$ und $\beta = 30°$. Durch die Konstruktion ergibt sich, dass hier zwei Lösungen existieren:

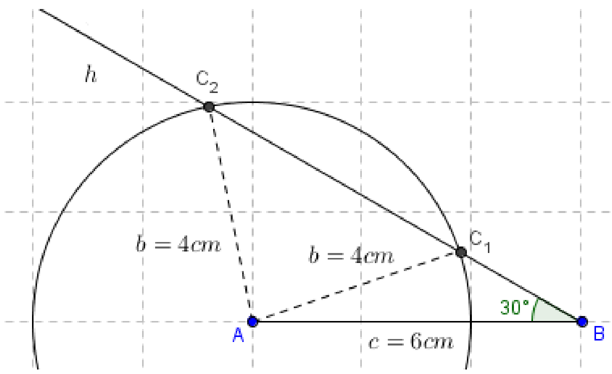


Abbildung 147: Dreieckskonstruktion SSW mit $b = 4cm$, $c = 6cm$ und $\beta = 30°$

Der Kreis um K um A mit Radius $b = 4cm$ schneidet den Halbstrahl h zwei Mal. Folglich erfüllen die beiden Dreiecke ABC_1 und ABC_2 die gewünschten Eigenschaften. Bei einer Konstruktion gelangt ein Lernender somit zwangsläufig an die Stelle, an der klar wird, dass bei dieser Konfiguration zwei Lösungen existieren.

Nun setzen wir diese Konfiguration wie gewohnt mit Geometry Expressions um, indem wir zuerst die Objekte erzeugen und dann Bedingungen übermitteln.

1. Erstelle ein Dreieck ABC.
2. Übermittle die Abstandsbedingung $|\overline{AB}| = 6cm$
3. Übermittle die Bedingung $\beta = 30°$ (im Bogenmaß $\pi/6$).
4. Übermittle die Abstandsbedingung $|\overline{AC}| = 4cm$.

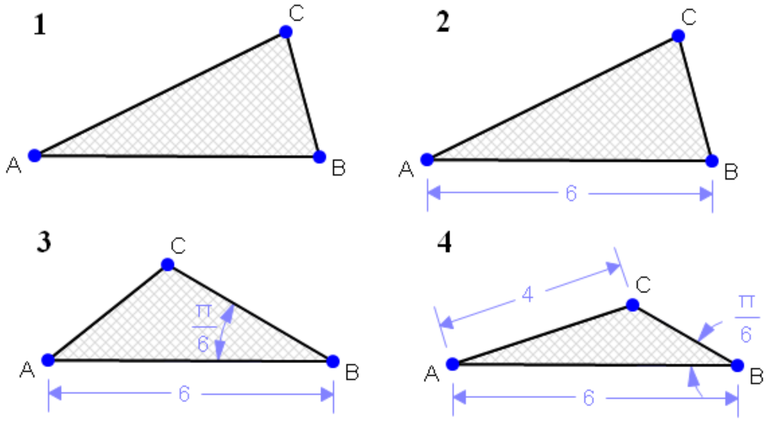


Abbildung 148: Umsetzung der Dreieckskonfiguration $b = 4cm$, $c = 6cm$ und $\beta = 30°$ mit GE

Danach lässt sich das Dreieck nicht mehr in der Form verändern. Ein Lernender wird folglich nicht darin unterstützt, zu erkennen, dass zu den gegebenen Anfangsgrößen zwei Lösungskonfigurationen existieren.

Beginnt ein Benutzer hingegen mit einem Dreieck, dessen Winkel bei A deutlich größer ist als in Abbildung 148, so wählt das RGS die andere Lösungskonfiguration aus:

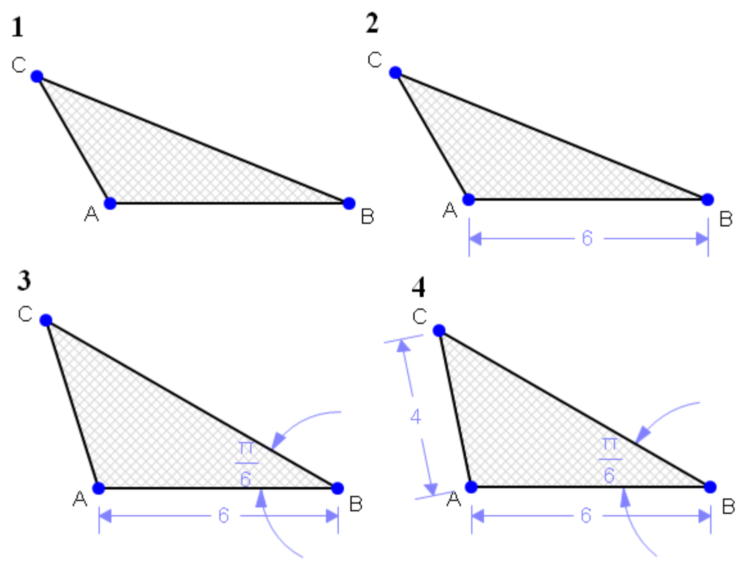


Abbildung 149: Weitere Umsetzung mit Geometry Expressions mit verändertem Anfangsdreieck

Auch hier lässt sich das Dreieck schließlich nicht mehr in der Form verändern. Bei einer Konstruktion mit DGS oder Zirkel und Geodreieck hingegen gelangt ein Lernender also zwangsläufig an die Stelle, an der klar wird, dass bei dieser Konfiguration zwei Lösungen existieren.

Bei der Verwendung von Geometry Expressions wird ein Lernender nicht darin unterstützt, zu erkennen, dass zu den gegebenen Anfangsgrößen zwei Lösungskonfigurationen existieren. Im Einklang mit dem relationalen Hauptprinzip wäre bei Benutzung des RGS, dass man durch Zug am Punkt C zwischen beiden Lösungen „springen" könnte, denn in beiden Lösungen sind jeweils alle Bedingungen erfüllt.

5. Beispielsweise lauten zwei implizite Bedingungen bei der Konfiguration der abrutschenden Leiter, dass der Boden und die Wand fest sind. Ohne diese Bedingungen weicht die Konfiguration zu stark von der realen Situation ab. Weiter wackelt die Konfiguration im Zugmodus so sehr, dass sie nicht sinnvoll exploriert werden kann. Die Konfiguration lässt sich durch diese impliziten Bedingungen leicht stabilisieren.

6. Das Prinzip „Ordnung halten" existiert sowohl für den physischen als auch für den virtuellen Werkzeugkoffer. Es ermuntert Lernende, zu überlegen, welche Werkzeuge allgemein oft oder aber nur für ein bestimmtes Problem benötigt werden. Damit werden Lernende zur Selbstorganisation angehalten. Außerdem ist es ein Anlass, die Konzepte Konstruieren und Relationen setzen zu trennen. Von einem höheren Standpunkt aus betrachtet sensibilisiert es Lernende, mit „Informationsflut" umzugehen, wenn sie nicht benötigte Werkzeuge bewusst ausblenden.

5 Aufgaben, die das relationale Denken fördern

Unabhängig von meinen Forschungsfragen fand ich es während der Interviews bemerkenswert, als Beatrice und Selina in Passage Nr. 1, Abschnitt #1 die Antwort gaben, dass ein Viereck mit vier gleich langen Seiten bereits ein Quadrat ist:[17]

Beatrice: „*Ja. Ein Quadrat hat ja immer vier gleich lange Seiten.*"
Selina: „*Ich bin auch der Meinung.*"

Hier greift funktionales Denken zu kurz: Es geht nicht um Zuordnungscharakter oder Änderungsverhalten, sondern um die definierenden Eigenschaften eines Quadrates. Mit anderen Worten: Die Relationen, die für die Seiten gelten, sind entscheidend. Das ist Anlass, Aufgaben zu entwickeln, die zur Kultivierung und Förderung des relationalen Denkens geeignet sind. Daher stelle ich im Folgenden drei Kategorien (Kat1) bis (Kat3) mit dieser Zielsetzung vor. Diese Kategorien sind nicht trennscharf, sondern können und sollen kombiniert werden. Absolut empfehlenswert im Kontext von Aufgabengenerierung ist [Schupp02].

(Kat1) Beweglichkeit und Freiheitsgrad einer Konfiguration

Zu einer Konfiguration soll der Freiheitsgrad ermittelt werden. Diese quantitative Fragestellung geht qualitativ einher mit dem Formulieren von Aussagen über die Beweglichkeit der Konfiguration.

(Kat2) Exploration einer Konfiguration

Eine in einem RGS vorliegende Konfiguration soll durch Setzen und Löschen von Relationen verändert und exploriert werden. Auf diese Art können zum Beispiel im Haus der Vierecke Symmetrien thematisiert werden oder weitere Ortskurven entdeckt werden.

(Kat3) Nachbau einer vorgegebenen Konfiguration

Eine vorgegebene Konfiguration soll nachgebildet werden. Hierzu ist es nötig, die bestehenden Relationen zu erkennen. Beispiele aus dem Unterricht sind gegeben durch Kreise, Kreisbogen und Parabeln. Einen Steinbruch an komplexeren Figuren bieten Parkettierungen.

Das relationale Denken ist nicht zwangsläufig gekoppelt an relationale Werkzeuge einer Geometriesoftware, daher können einige Aufgaben auch ohne Computer bearbeitet werden. Die praktische Erprobung dieser Aufgaben ist Gegenstand weiterer Forschung. Dazu lade ich das Kollegium hiermit ein.

5.1 Freiheitsgrad und Beweglichkeit einer Konfiguration

Den Begriff Freiheitsgrad haben wir im Unterkapitel 2.4 definiert und erläutert. In diesem Zusammenhang sprechen wir auch von der „Beweglichkeit" einer Konfiguration. Diese Vorstellung wird mit der nächsten Aufgabe verdeutlicht.

[17] Die Frage a) der Aufgabe lautete: „Ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten zwangsläufig ein Quadrat?"

Aufgabe „Gelenkarm“

Ein Gelenkarm APQ bestehe aus den zwei Stangen $\overline{AP}$ und $\overline{PQ}$. Der Punkt A sei die Basis des Gelenkarms, also fixiert. Beantworte die folgenden Fragen und begründe Deine Antworten.

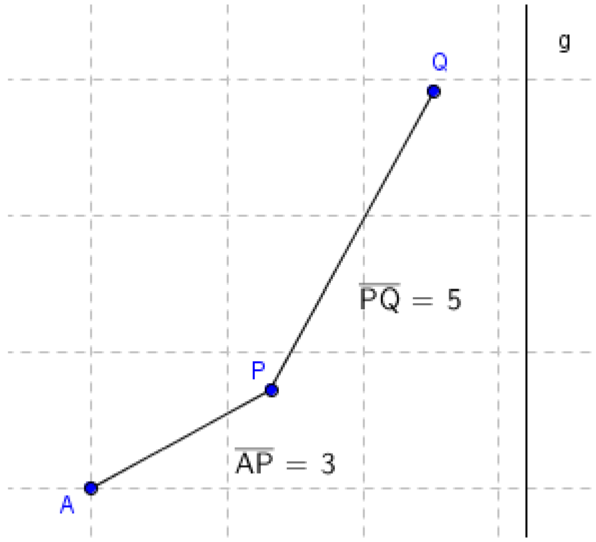


Abbildung 150: Zwei Stangen $\overline{AP}$ und $\overline{PQ}$ bilden den Gelenkarm $\overline{APQ}$.

a) Wie groß ist der kleinste und der größte Abstand, den Q zu A haben kann?

b) Der Punkt A liege im Koordinatenursprung $(0|0)$. Kann mit dem Gelenkarm der Punkt $R(7|5)$ erreicht werden?

c) Wenn die Punkte Q und A jeweils feste Koordinaten besitzen, ist dann die Lage von P eindeutig bestimmt?

d) Wie viele Größen benötigst Du mindestens, um die Lage des Gelenkarmes $\overline{APQ}$ eindeutig zu beschreiben? Welche Größen sind das?

e) Die Gerade g verlaufe parallel zur y-Achse durch den Punkt $(8|0)$. Wo kann P liegen, wenn Q von g den Abstand 2 haben soll? Wie viele solche Konfigurationen findest Du, die diese Bedingungen erfüllen?

Besprechung der Aufgabe „Gelenkarm“

Die Aufgabe kann sowohl mit DGS oder RGS als auch mit Papier und Bleistift bearbeitet werden. Zur Umsetzung mit einem DGS ist das relationale Werkzeug *Punkt auf Linie* nützlich.

Um Teilaufgabe a) zu lösen, muss ein Lernender die beiden grenzwertigen Konfigurationen finden, in denen die Punkte A, P und Q jeweils auf einer Geraden liegen. Das sollte ein leichter Einstieg in den Aufgabenkontext sein. Der kleinste Abstand beträgt $5cm - 3cm = 2cm$, der größte Abstand $5cm + 3cm = \ 8cm$.

Eine Antwort auf die Frage der Teilaufgabe b) lässt sich mit einem DGS/RGS durch Probieren ermitteln. Eine mathematische Begründung liefert der Satz von Pythagoras:

$$\sqrt{7^2+5^2} > 8{,}6 > 8 = 5+3.$$

Der Punkt $R(7|5)$ ist also etwas zu weit entfernt für den Gelenkarm.

Die Lage des Punktes P in Teilaufgabe c) ist nicht eindeutig bestimmt: Es gibt zwei mögliche Konfigurationen, die spiegelsymmetrisch zur gedachten Strecke $\overline{AQ}$ liegen.

Teilaufgabe d) zielt auf den Freiheitsgrad ab. Bei vorgegebenem Anfangspunkt A kann das System vollständig durch die vier Koordinaten der Punkte $P(x|y)$ und $Q(x|y)$ beschrieben werden. Es reichen aber bereits zwei Größen zur vollständigen Beschreibung des Systems aus: der Winkel, der von $\overline{AP}$ mit der x-Achse gebildet wird, und der Winkel, der von $\overline{PQ}$ mit der Parallelen zur x-Achse gebildet wird. Durch die Verwendung von Polarkoordinaten wird in natürlicher Weise die Kreissymmetrie ausgenutzt.

Die Antwort der Teilaufgabe e) lautet vier: Zur Symmetrie der gedachten Strecke $\overline{AQ}$ wie bei Teilaufgabe c) kommt die Symmetrie bzgl. der x-Achse hinzu.

Die Aufgabe lässt sich variieren bzw. erweitern durch einen Gelenkarm mit mehr als zwei Stangen und anderen Bedingungen, die vorgegeben werden.

Aufgabe „Rechteck mit konstantem Flächeninhalt“

Das Rechteck $ABCD$ sei durch seine vier Eckpunkte gegeben. Beantworte die folgenden Fragen und begründe Deine Antworten.

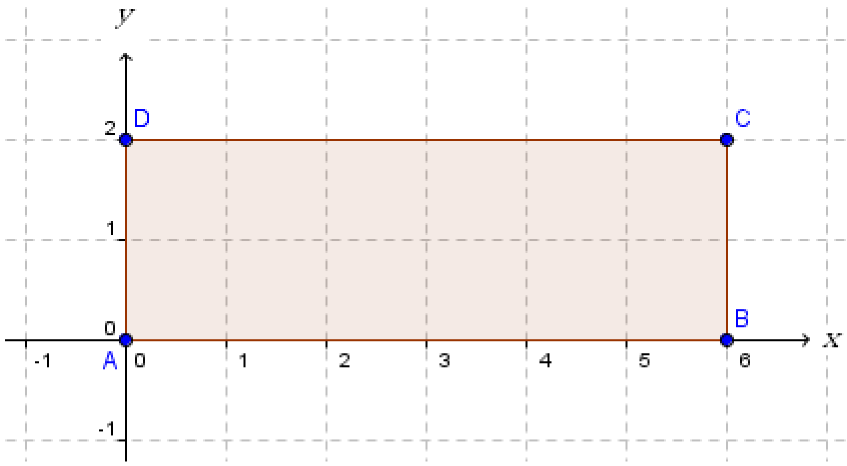


Abbildung 151: Figur zur Aufgabe „Rechteck mit konstantem Flächeninhalt“

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$?

b) Du darfst nun die Lage des Eckpunktes C verändern, aber der Punkt A soll fest bleiben und der Flächeninhalt des Rechtecks muss gleich bleiben. Zeichne auf diese Weise vier weitere Rechtecke in das Koordinatensystem ein.

c) Wie bist Du in Teil b) vorgegangen, um weitere Eckpunkte zu finden? Beschreibe Deine Vorgehensweise.

d) Die Koordinaten von C bezeichnen wir mit $(x|y)$. Begründe die Gültigkeit der Gleichung: $x \cdot y = 12$.

e) Verbinde die neuen Eckpunkte C glatt miteinander, das heißt ohne Knicke. Die Kurve, die dabei entsteht, hat einen eigenen Namen: Hyperbel.

f) Durch welche Größen wird ein Rechteck eindeutig bestimmt? Sei möglichst kreativ. Wie viele Größen benötigst Du mindestens?

Besprechung der Aufgabe „Rechteck mit konstantem Flächeninhalt"

Im Falle der Bearbeitung mit einem RGS ist darauf zu achten, dass die nötige Einschränkung des Flächeninhaltes innerhalb der Software formuliert werden kann. Unabhängig davon kann die Aufgabe auch mit Papier und Bleistift bearbeitet werden. Durch die Fragestellung wird die Hyperbel im geometrischen Kontext anschaulich als Ortskurve entdeckt.

Bei Teilaufgabe c) könnte eine typische Formulierung lauten: „*Der Flächeninhalt beträgt* $12cm^2$ *und* $12 = 6 \cdot 2$. *Ich vertausche einfach die Faktoren:* $12 = 2 \cdot 6$ *oder ich bilde die 12 aus anderen Faktoren, zum Beispiel* 3 *und* 4 *oder* 1 *und* 12. *So gelange ich zu den weiteren Punkten* $(2|6), (4|3)$, $(3|4)$, $(12|1)$ *und* $(1|12)$."

Teilaufgabe d) ist die algebraische Formulierung der Zahlenergebnisse aus b). Dabei entsteht in natürlicher Weise ein algebraisches Ergebnis in Form der Flächengleichung $x \cdot y = 12$ für ein Rechteck. In dieser Gleichung stehen beide Variablen x und y gleichberechtigt, da sie nach keiner Variablen aufgelöst ist. Außerdem ist die Gleichung symmetrisch bzgl. x und y, man kann die Variablen vertauschen, ohne dass sich die Gleichung verändert. Beide Aspekte korrespondieren mit dem geometrischen Kontext, denn die Seitenlängen eines Rechteckes gehen mit gleichem Gewicht in den Flächeninhalt ein. Weiter können nach ROTH in die Konfiguration sowohl die Veränderung der Rechtecke als auch die Veränderung der Lage des Eckpunktes C hinein gedacht werden.

Der Teil f) zielt auf den Freiheitsgrad ab. Folgende Lösungen sind denkbar:

- alle vier Eckpunkte,
- zwei diagonal gegenüberliegende Eckpunkte,
- Mittelpunkt und ein Eckpunkt.

Weitere kreative Lösungen sind denkbar, wenn man zum Beispiel das Verhältnis zweier Seiten verwendet.

5.2 *Exploration einer Konfiguration*

BENDER und SCHREIBER formulieren in ihrer operativen Genese der Geometrie:

> „*Geometrie zu lernen und zu betreiben bedeutet größtenteils, geometrische Begriffe zu erwerben und mit ihnen umzugehen*." [Bender/Schreiber85, S. 16]

Zu den wichtigen geometrischen Begriffen zählen sicherlich die geometrischen Objekte wie Dreieck und Viereck. Durch Hinzu- oder Wegnahme der Eigenschaften von Vierecken lässt sich das Haus der Vierecke erkunden. Hierfür fachmathematische Voraussetzungen sind die Konzepte einer Menge (Teilmenge, Obermenge) und das logische Schlussfolgern, insbesondere die Unterscheidung zwischen Voraussetzung und Behauptung.

Aufgabe „Haus der Vierecke ohne RGS"

Schau Dir den folgenden Ausschnitt des Hauses der Vierecke an.

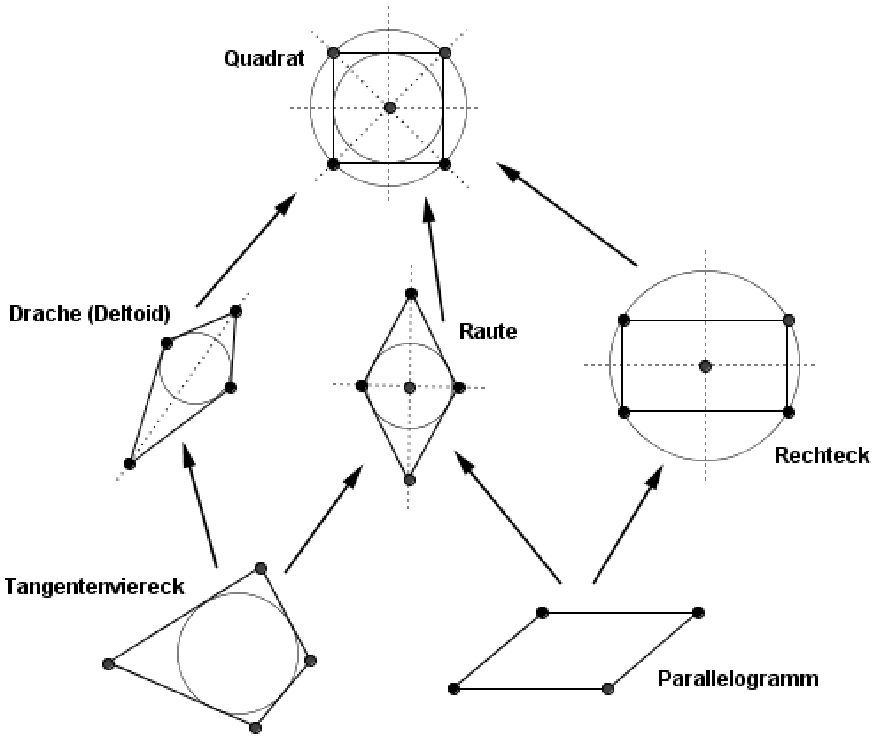


Abbildung 152: Das Haus der Vierecke (Ausschnitt)

a) Ergänze folgende Sätze:

   Eine Raute ist ein Viereck, bei dem alle Seiten ……………….. sind.
   Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem ……………………………….sind.

b) Wie gelangst Du im Haus der Vierecke von einem Parallelogramm zu einer Raute?

c) Ist jede Raute auch ein Parallelogramm? Ist jedes Parallelogramm auch eine Raute? Begründe Deine Antworten.

d) Wie gelangst Du von einem Tangentenviereck zu einem Drachen?

Besprechung der Aufgabe „Haus der Vierecke ohne RGS“

Die Aufgabe behandelt die Eigenschaften der darin vorkommenden Vierecke und stellt Beziehungen zwischen ihnen her. Die Aufgabe kann ohne Software bearbeitet werden, wenn diese Vierecke und deren Eigenschaften behandelt wurden.

In Teilaufgabe a) werden zwei Eigenschaften abgefragt. Eine Raute ist ein Viereck, bei dem alle Seiten **gleich lang** sind. Ein Parallelogramm ist ein Viereck, bei dem **gegenüberliegende Seiten parallel** sind.

Um in Teil b) von einem Parallelogramm zu einer Raute zu gelangen, muss ein Lernender formulieren, welche zusätzlichen Bedingungen für eine Raute erfüllt sein müssen: Bei einem Parallelogramm sind nur gegenüberliegende Seiten gleich lang, während bei einer Raute alle vier Seiten gleich lang sind.

Teilaufgabe c) zielt auf die Frage der Teilmengenbeziehung ab: Jede Raute ist auch ein Parallelogramm, aber nicht jedes Parallelogramm ist zwangsläufig eine Raute. Die korrekte Leserichtung im Haus der Vierecke ist unabdingbar für die Fortbewegung darin.

In Teilaufgabe d) ist für den Übergang vom Tangentenviereck zum Drachen eine zusätzliche Symmetrieachse nötig.

Aufgabe „Haus der Vierecke mit RGS“

a) Erstelle mit dem RGS ein allgemeines Viereck $ABCD$.

b) Übermittle Bedingungen, sodass das Viereck zu einem Rechteck wird.

c) Wie viele Bedingungen hast Du gebraucht? Kommst Du mit drei Bedingungen aus?

d) Lösche oder setze Bedingungen derart, dass das Rechteck zu einer Raute wird.

e) Wie kannst Du mit einer Bedingung erreichen, dass die Raute zu einem Quadrat wird?

f) Wie kannst Du ein allgemeines Viereck zu einer Raute einschränken?

Besprechung der Aufgabe „Haus der Vierecke mit RGS“

Bei Teilaufgabe a) möge die Lehrkraft darauf achten, dass das Viereck nicht zu speziell ist, anderenfalls kommt es erfahrungsgemäß zu falschen Schlussfolgerungen, da ein Lernender von nicht vorhandenen Symmetrieeigenschaften ausgeht.

In Teil b) sind mehrere Lösungen möglich, zum Beispiel:

- Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang und ein Winkel beträgt 90°.
- Drei Winkel betragen 90°.

Für Teil c) reichen wie gerade gesehen drei Bedingungen aus. Für die Bearbeitung von Teil d) muss ein Lernender die Eigenschaften von Rechteck und Raute kennen. Außerdem hängt die konkrete Lösung von den Bedingungen ab, durch die das Rechteck entstanden ist. Wurden drei Innenwinkel auf 90° gesetzt, so müssen diese Bedingungen für eine allgemeine Raute gelöscht werden und weiter die Bedingungen gesetzt werden, dass alle vier Seiten gleich lang sind.

Teilaufgabe e) wird gelöst, indem ein Innenwinkel auf 90° gesetzt wird.

In Teil f) übermittelt man die Bedingungen, dass alle vier Seiten paarweise gleich lang sind.

Bei der Bearbeitung solcher Aufgaben mit einem RGS kann sich ein Lernender durch gezieltes Setzen und Löschen von Bedingungen im Haus der Vierecke fortbewegen. Dazu benötigt er die charakteristischen Eigenschaften der Vierecke. Setzen von Relationen bzw. Einschränkungen bedeutet Fortbewegung hin zu Vierecken mit höherer Symmetrie, Löschen von Relationen bedeutet Fortbewegung hin zu Vierecken mit geringerer Symmetrie.

Aufgabe „Ortslinie aller Punkte mit gleichem Abstand zu zwei Kreisen“

Gegeben sei der Kreis K_1 mit Mittelpunkt $(0|0)$ und Radius $1cm$ und der Kreis K_2 mit Mittelpunkt $(6|0)$ und Radius $3cm$.

Beantworte die folgenden Fragen und begründe Deine Antworten.

a) Trage die Punkte in ein Koordinatensystem ein und konstruiere die beiden Kreise.

b) Finde drei Punkte, die von beiden Kreisen jeweils den gleichen Abstand besitzen. Wie gehst Du vor?

c) Was ist der kleinstmögliche gemeinsame Abstand zu beiden Kreisen?

d) Beschreibe die Form der Ortskurve, auf der alle Punkte mit gleichem Abstand zu beiden Kreisen liegen.

e) Welche spezielle Form hat die Ortskurve, wenn die Radien der beiden Kreise gleich groß sind?

f) Wie verändert sich die Form die Ortskurve, wenn Du den zweiten Kreis auf der x-Achse nach rechts verschiebst?

Besprechung der Aufgabe „Ortslinie aller Punkte mit gleichem Abstand zu zwei Kreisen“

Die Aufgabenteile a) und b) können problemlos mit Papier und Bleistift bearbeitet werden. Für die weiteren Teile erleichtert ein DGS oder RGS die Behandlung der Fragestellung. Teil a) erfolgt durch Konstruktion von Abstandskreisen mittels eines Zirkels oder auch durch das Setzen von Abstandsbedingungen in einem RGS.

Der kleinstmögliche Abstand in Teil c) wird aus Symmetriegründen im Punkt $(2|0)$ erreicht und beträgt $1cm$.

Bei Teil d) können Lernende zum Beispiel formulieren „linksgekrümmt“, „linksgebogen“, „näher am kleinen Kreis“ und so weiter.

Im Fall gleich großer Radien in Teilaufgabe e) wird die Kurve zu einer Geraden, genauer gesagt zur Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecke zwischen beiden Mittelpunkten. Als Antwort der Teilaufgabe f) könnten Lernende etwa formulieren, dass die linksgebogene Kurve sich einer Geraden annähert. Eine Geometriesoftware mit Algebra-Schnittstelle könnte hier weiterführend die Berechnung der Gleichung der Ortslinie übernehmen.

5.3 Nachbau einer vorgegebenen Konfiguration

Wir haben bereits im Unterkapitel 2.3 besprochen, inwiefern Lernende Schwierigkeiten haben, einen Pantographen mit einem DGS umzusetzen. Ein RGS wie Geometry Expressions ermöglicht jedoch die Umsetzung durch ein Kompositionsprotokoll. Hierzu muss ein Benutzer lediglich die beteiligten Objekte erzeugen und die zwischen ihnen gültigen Beziehungen vorgeben.

Aufgabe „Umsetzung eines Pantographen mit RGS“

Betrachte den Pantographen mit den vorgegebenen Streckenlängen:

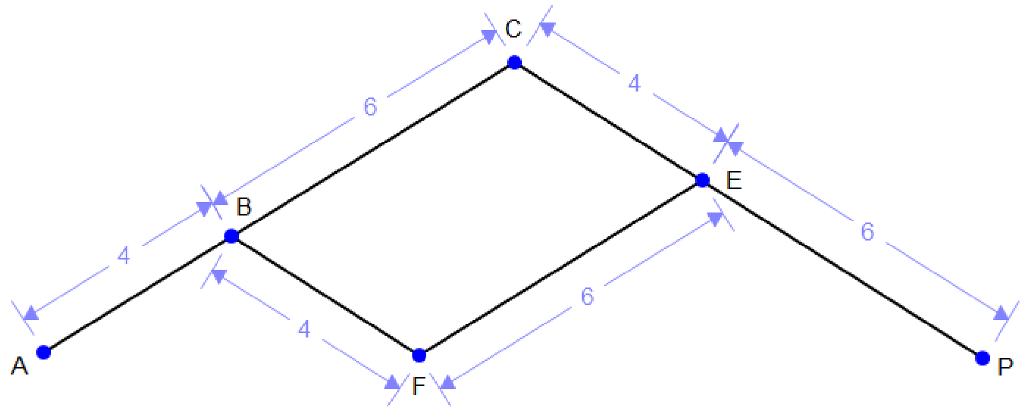
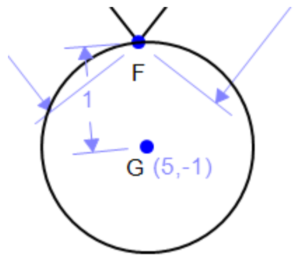


Abbildung 153: Model eines Pantographen

a) Setze die Konfiguration mit dem RGS um. Gib Dein Kompositionsprotokoll an.

b) Fixiere den Punkt A als Koordinatenursprung.

c) Ergänze die Konfiguration:



Erstelle einen Kreis mit dem Mittelpunkt $G(5|-1)$. Übermittle die Bedingungen, dass F und der Kreis inzidieren. Setze den Radius des Kreises auf 1 fest.

d) Überprüfe in dem RGS, dass Du den Punkt F nur noch auf der Kreislinie bewegen kannst.

e) Welche Konsequenz hat das für den Punkt P, wenn Du den Punkt einmal um den Kreis ziehst?

Besprechung der Aufgabe „Umsetzung eines Pantographen mit RGS“

In Teil a) gelingt die Umsetzung des Pantographen mit diesem Protokoll:

1. Erzeuge die Strecke $\overline{AC}$, setze einen Punkt B darauf und übermittle die Bedingungen für die Abstände: $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$.
2. Erzeuge die Strecke $\overline{CP}$, setze einen Punkt E darauf und übermittle die Bedingungen für die Abstände: $\overline{CE} = 4$, $\overline{EP} = 6$.
3. Erzeuge die Strecken $\overline{BF}$ und $\overline{FE}$ und übermittle die Bedingungen für die Abstände: $\overline{BF} = 4$, $\overline{FE} = 6$.

In Teil b) und c) werden weitere Bedingungen umgesetzt durch feste Koordinaten für die Punkte $A(0|0)$, $G(5|-1)$ und eine Abstandsbedingung für den Kreisradius.

Danach lässt sich der Punkt F gemäß dem Hauptprinzip der RGS nur noch auf der Kreislinie bewegen. Das hat für den Punkt P die gleiche Konsequenz, allerdings mit größerem Kreisradius. Freilich sind weitere Aufgabenteile möglich, insbesondere mit Blick auf das Vergrößerungsverhältnis und mit anderen Figuren, die nachgezeichnet werden, aber hier soll nur die Umsetzung eines Pantographen mit einem RGS gezeigt werden. In einem DGS führt das erfahrungsgemäß auf Probleme, vgl. S. 40, insbesondere müssten bei der Konstruktion mit einem DGS die Punkte A und F frei sein.

In den weiteren Aufgaben sind ein Kreis, ein Kreisbogen und eine Parabel in einer Software-Datei vorgegeben. Diese sollen jeweils nachgebaut werden. Die Aufgaben zielen darauf ab, dass Lernende erkennen, durch welche Größen diese Objekte eindeutig bestimmt werden und wie sich diese Größen gegenseitig beeinflussen. Für mich war das Stichwort für die Entwicklung dieser Aufgaben die bekannte Modellierung einer Hängebrücke mittels einer Parabel und daran anschließend die Frage, wie gehe ich hiervon wieder etwas in die reine Geometrie zurück: Wie kann man andere Grundobjekte möglichst passgenau nachkonstruieren?

Aufgabe „Kreis nachbilden“

Betrachte die folgende Konfiguration in Deiner Arbeitsdatei.

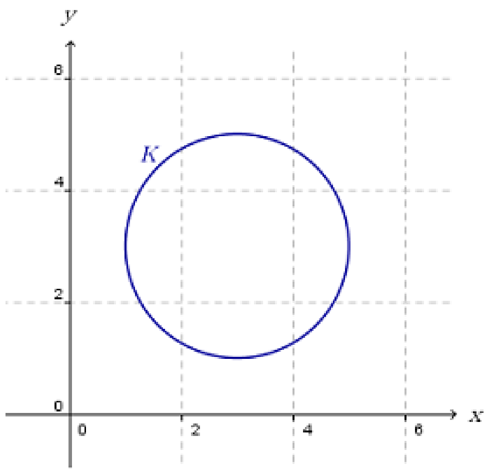


Abbildung 154: Ein Kreis mit gesuchtem Mittelpunkt und Radius

a) Versuche den Kreis möglichst gut mit der Software nachzubilden.

b) Welche Koordinaten für den Mittelpunkt $M(x|y)$ liest Du ab?

c) Wie groß ist der Radius r?

d) Wie bist Du vorgegangen, um den Kreis möglichst gut nachzubilden? Beschreibe Deine Vorgehensweise in ein paar Sätzen.

e) Mit welchen Größen kannst Du einen Kreis eindeutig beschreiben?

Aufgabe „Kreisbogen nachbilden"

Betrachte die folgende Konfiguration in Deiner Arbeitsdatei.

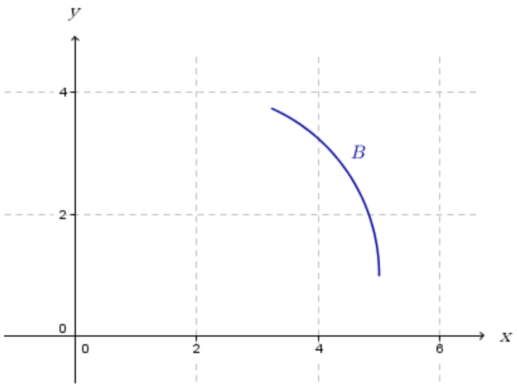


Abbildung 155: Ein Kreisbogen B mit gesuchtem Mittelpunkt und Radius

a) Versuche den Kreisbogen B möglichst gut nachzubilden.

b) Welche Koordinaten für den Mittelpunkt $M(x|y)$ liest Du ab?

c) Wie groß ist der Radius r?

d) Wie bist Du vorgegangen, um den Kreisbogen möglichst gut abzubilden? Beschreibe Deine Vorgehensweise in ein paar Sätzen.

e) Angenommen, Du hast den Anfangspunkt und den Endpunkt eines Kreisbogens gegeben. Außerdem kennst Du den Abstand zwischen beiden Punkten. Ist dann der Kreisbogen eindeutig bestimmt? Begründe Deine Antwort.

f) Mit welchen Größen kannst Du einen Kreisbogen eindeutig beschreiben?

Besprechung der Aufgaben „Kreis nachbilden" und „Kreisbogen nachbilden"

Die Handlungsaufforderung, den Kreis bzw. den Kreisbogen möglichst gut nachzubilden, ist prägnant. Der Benutzer soll den Mittelpunkt und den Radius des Kreises möglichst gut bestimmen. Beide Aufgaben können sowohl mit Papier und Zirkel als auch mit Geometriesoftware (DGS oder RGS) bearbeitet werden. Beim Bearbeiten der Aufgaben mit einer Geometriesoftware vermute ich, dass Lernende die Lage des Mittelpunktes und die Größe des Radius abwechselnd verändern, um den Kreis bzw. den Kreisbogen möglichst gut an die Vorgabe anzupassen. Das korrespondiert mit dem Aspekt des relationalen Denkens, dass die Variablen, die eine Konfiguration bestimmen, gleichberechtigt sind. Das Bearbeiten kann für

Lernende dementsprechend ergiebig sein, wenn die Lehrkräfte das folgende sicherstellen: Hier wird nur mit **freien** Punkten gearbeitet, die hin- und her bewegt werden, solange, bis der Kreis bzw. der Kreisbogen möglichst gut nachgebaut ist. Dieses Vorgehen ist somit gegenüber den auseinanderfallenden Konstruktionen deutlich abzugrenzen.

Beide Aufgaben bieten Möglichkeiten der Fortsetzung und der Vertiefung: Man kann auch drei Punkte auf die Kreislinie zu setzen und dann ein Werkzeug *Kreis durch drei Punkte* benutzen oder den Mittelpunkt durch die Konstruktion von zwei Mittelsenkrechten bestimmen. Danach ergibt sich der Radius als Abstand des Mittelpunktes zu einem Punkt auf der Kreislinie.

Für die eindeutige Bestimmung des Kreisbogens ist neben Mittelpunkt und Radius eine weitere Größe nötig. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten, zum Beispiel ein Winkel oder eine Bogenlänge oder die Angabe von Anfangs- und Endpunkt des Bogens. Des Weiteren wird durch die Handlungsaufforderung des Annäherns die fundamentale Idee der Approximation aufgegriffen. Die Aufgabenstellung lässt sich sinngemäß auf andere Kurven übertragen:

Aufgabe „Parabel nachbilden“

Betrachte die folgende Konfiguration einer Parabel in Deiner Arbeitsdatei.

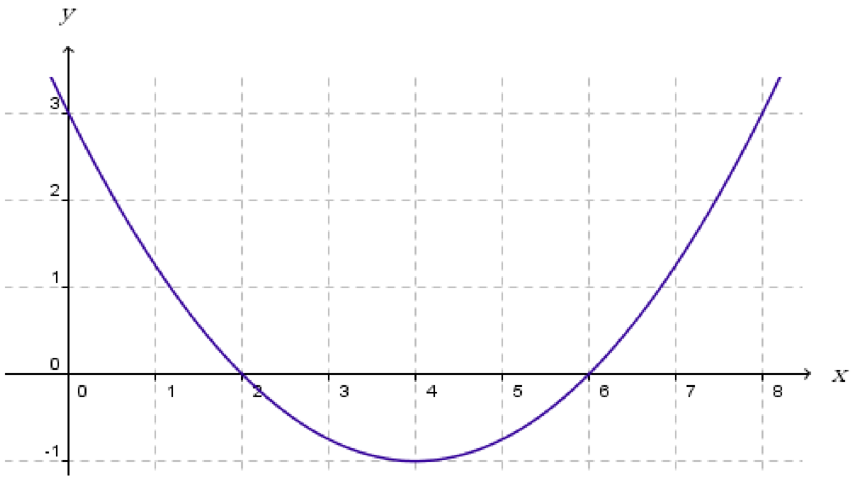
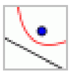


Abbildung 156: Parabel mit gesuchtem Brennpunkt und Leitgerade

a) Versuche die Parabel möglichst gut nachzubilden, in dem Du das Werkzeug Parabel  benutzt.

b) Welche Koordinaten für den Brennpunkt liest Du ab?

c) Welche Gleichung hat die Leitgerade?

d) Wie bist Du vorgegangen, um die Parabel möglichst gut nachzubilden? Beschreibe Deine Vorgehensweise in ein paar Sätzen.

e) Begründe ohne Rechnung: die Funktionsterme $f(x) = 0{,}25 \cdot (x-2) \cdot (x-6)$ und $g(x) = 0{,}25(x-4)^2 - 1$ beschreiben beide die obige Parabel.

f) Mit welchen Größen kannst Du eine Parabel eindeutig beschreiben?

Besprechung der Aufgabe „Parabel nachbilden“

Die Aufgabe ist analog zu den Aufgaben Kreis und Kreisbogen nachbilden, allerdings ist sie im Teil a) für Software formuliert.

Aufgabenteil e) bietet eine Überschneidung des geometrischen Kontextes mit der Algebra. Zur Beantwortung des Aufgabenteils e) muss ein Lernender die Funktionsterme interpretieren können: Aus der ersten Darstellung kann man beide Nullstellen ablesen, aus der zweiten Darstellung lässt sich der Scheitelpunkt ablesen. Beiden Darstellungen gemeinsam ist der Streckfaktor $0{,}25$ als Koeffizient von x^2 und beide Darstellungen bieten verschiedene Blickwinkel auf dasselbe Objekt.

Nach Bearbeitung der Aufgabenteile a) bis e) können die Ergebnisse im Teil f) zusammengefasst werden. Eine Parabel lässt sich eindeutig beschreiben durch:

- den Brennpunkt und die Leitgerade,
- den Scheitelpunkt und einen weiteren Punkt,
- den Scheitelpunkt und den Streckfaktor,
- zwei Nullstellen – falls diese existieren – und den Streckfaktor oder auch durch
- drei Punkte, die auf ihr liegen.

Die Aufgabe lässt sich erweitern und realitätsbezogener formulieren, wenn zum Beispiel ein parabelförmiger Brückenbogen oder eine Wasserfontäne anzunähern ist.

Im nächsten Unterkapitel weiten wir den Gedanken des Nachbaus aus und beschäftigen uns mit Parkettierungen.

5.4 Parkettierungen

Parkettierungen lassen sich unabhängig von Software thematisieren und bieten einen Steinbruch für weitere Aufgaben der Kategorie Figur nachbilden. Funktionales Denken und relationales Denken sind einander ergänzende Sichtweisen und ermöglichen in Kombination ein tieferes Verständnis der Parkettierungen.

Definition *Parkettierung*

Unter einer Parkettierung verstehen wir eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der Ebene durch Polygone.

Beispiel 1: Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken

Eine lückenlose und überlappungsfreie Überdeckung der Ebene ist zum Beispiel möglich durch regelmäßige Sechsecke. Diese Parkettierung kommt bei der Pflasterung eines Bürgersteigs und bei Bienenwaben vor.

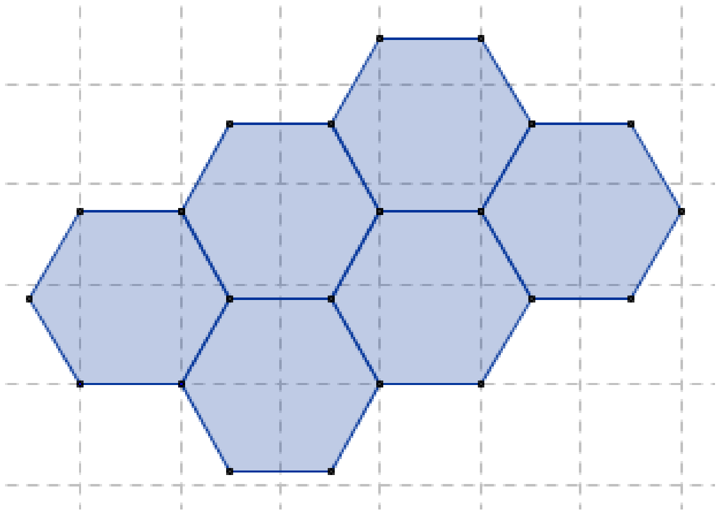


Abbildung 157: Ausschnitt einer Parkettierung durch regelmäßige Sechsecke

Dass durch regelmäßige Sechsecke eine Parkettierung gegeben wird, ist mit Blick auf Abbildung 157 augenscheinlich erfüllt. Die Frage, **warum** regelmäßige Sechsecke eine Parkettierung liefern, bietet im Unterricht eine Möglichkeit, zu argumentieren und zu begründen:

1. Durch Zerlegung in zwei Vierecke ergibt sich die Innenwinkelsumme eines beliebigen Sechsecks zu $2 \cdot 360° = 720°$.
2. Der Winkel in jeder Ecke eines regelmäßigen Sechsecks beträgt $720° \div 6 = 120°$.
3. In einer Ecke der Hexagon-Parkettierung treffen genau drei Sechsecke zusammen.
4. Der Umlaufwinkel jeder Ecke beträgt somit $3 \cdot 120° = 360°$, ist also ein Vollwinkel.
5. Folglich ist die Überdeckung vollständig und überlappungsfrei.

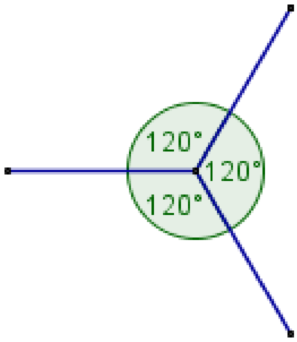


Abbildung 158: An einer gemeinsamen Ecke wird ein Vollwinkel gebildet.

Damit Lernende die Besonderheit der Tatsache wertschätzen können, dass etwas funktioniert sollte man diese Situation derjenigen gegenüberstellen, in der es gerade nicht funktioniert: Die Ebene kann zum Beispiel mit regelmäßigen Fünfecken nicht parkettiert werden.

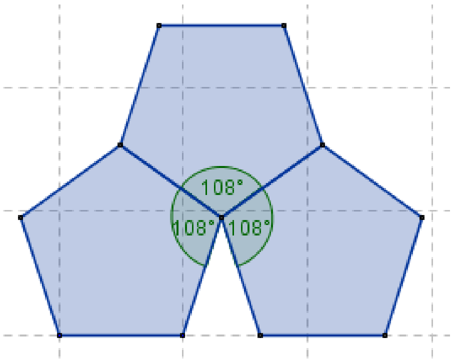


Abbildung 159: Mit regelmäßigen Fünfecken lässt sich keine Parkettierung erzeugen.

Die Begründung erfolgt wie oben: Der Innenwinkel eines regelmäßigen Fünfecks beträgt $108°$. Fügt man die Fünfecke zusammen, so berühren sich drei davon in einem gemeinsamen Punkt, jedoch wird in diesem Punkt der Vollwinkel nicht erreicht: $3 \cdot 108° = 324° < 360°$.

Beispiel 2: Kairo-Parkettierung

Es gibt allerdings ein **un**regelmäßiges Fünfeck mit dem sich die Ebene parkettieren lässt. Ein Beispiel hierfür ist die sogenannte Kairo-Parkettierung.

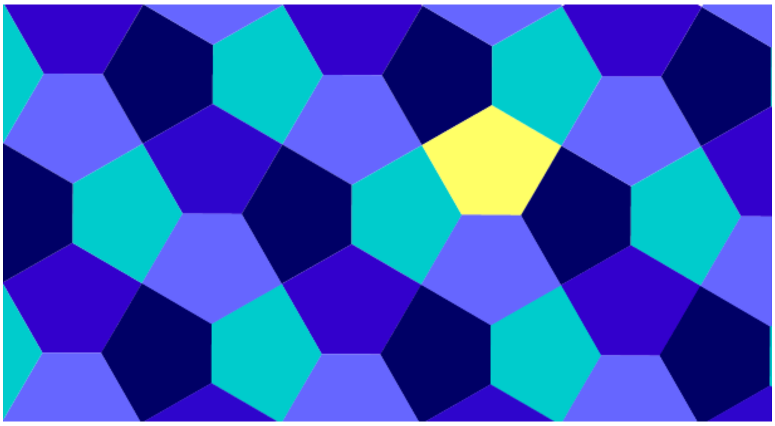


Abbildung 160: Ausschnitt der Kairo-Parkettierung mit Grundbaustein (gelb)

Durch Betrachten des Musters erkennen wir den Grundbaustein des Parketts: Es handelt sich um ein Fünfeck. Durch Nachmessen erhalten wir die (vermutlichen) Eigenschaften des Fünfecks und daraus anschließend eine mögliche Konstruktion.

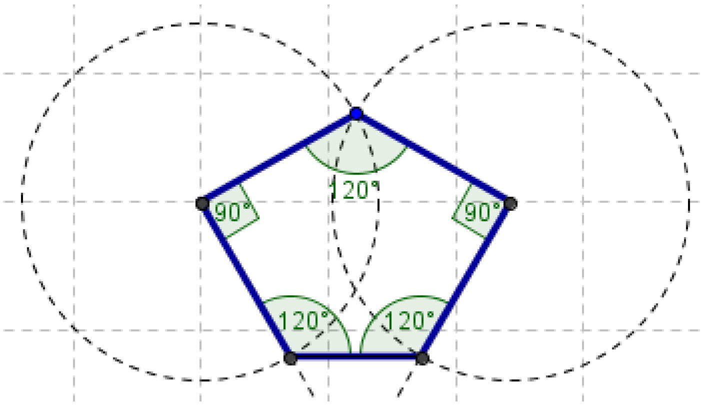


Abbildung 161: Die Konstruktionsfigur des Grundbausteins

Dieses Fünfeck besteht aus vier gleich langen Seiten. Die fünfte Seite ist etwas kürzer als die anderen Seiten. Die Innenwinkel betragen 120°, 90°, 120°, 90° und 120°. Vier identische Exemplare dieses Fünfecks werden zu einem Sechseck zusammengesetzt.

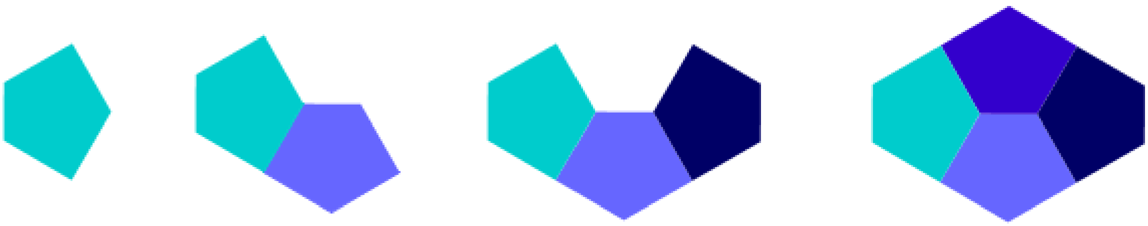


Abbildung 162: Vier identische Exemplare des Fünfecks bilden ein Sechseck.

Das Sechseck ist punktsymmetrisch, daher kann mit diesem Sechseck die Ebene parkettiert werden, vgl. [Willimann07, S. 13].

Enaktiv formuliert nehmen wir hierzu mehrere identische Exemplare des Sechsecks und fügen diese zusammen. Relational betrachtet realisieren wir die Bedingungen, dass zwei Punktepaare inzidieren, so dass also gleich lange Seiten zur Deckung kommen. Kinder würden sagen, dass sie Legoteile zusammenstecken:

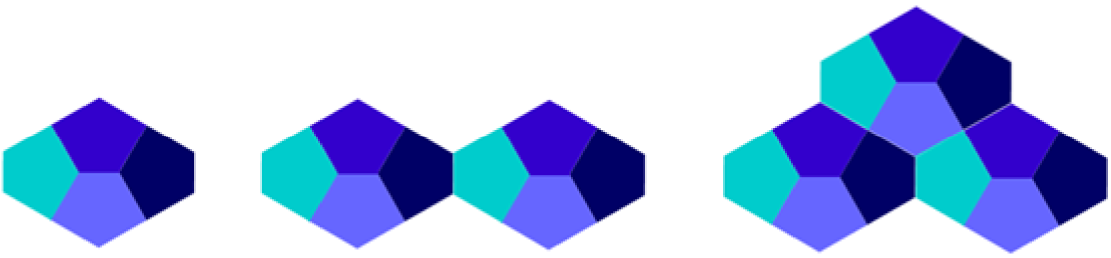


Abbildung 163: Das Kairo-Parkett entsteht aus identischen Exemplaren des obigen Sechsecks.

Fahren wir auf diese Weise fort, so erhalten wir das Kairo-Parkett wie in Abbildung 160. Wir sehen bei dieser Vorgehensweise, dass ein lückenloses, überlappungsfreies Parkett entsteht.

Zur Konstruktion einer Parkettierung sucht man üblicherweise einen **rechteckigen** Grundbaustein minimaler Ausdehnung und kopiert diesen in ein kartesisches Gitter.[18] Für die Kairo-Parkettierung ergibt sich sogar ein quadratischer Grundbaustein:

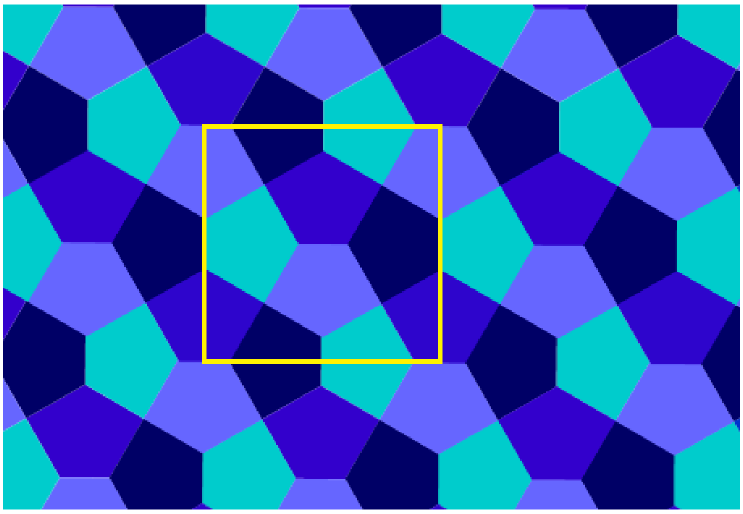


Abbildung 164: Ein alternativer, quadratischer Grundbaustein der Kairo-Parkettierung

In der nächsten Abbildung sehen wir, wie identische Kopien des quadratischen Grundbausteins in ein kartesisches Gitter eingefügt werden.

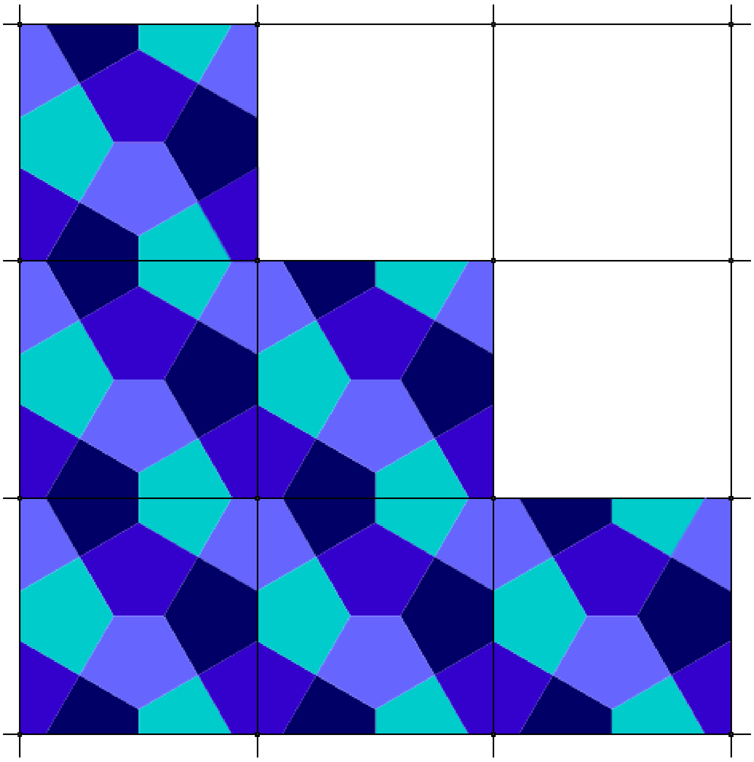


Abbildung 165: Der quadratische Grundbaustein wird in ein kartesisches Gitter übertragen.

Diese Umsetzung ist mit einem DGS durchführbar, solange es möglich ist, eine Teilstruktur zu kopieren und an gewünschter Stelle passend einrasten zu lassen.[19] Gleichwohl liegt dann

[18] Für das Finden eines minimalen Grundbausteins mit rechteckigen Abmessungen gibt es im Englischen die prägnante Formulierung *framing the infinite,* vgl. [Su07, S. 6].

[19] Abbildung 165 wurde auf diese Weise mit GeoGebra erstellt.

keine stabile Gesamtkonstruktion vor, denn die einzelnen Kacheln enthalten jeweils zwei freie Punkte. Um eine stabile Gesamtkonstruktion zu erhalten, bieten sich Achsenspiegelungen mit den Fugen als Symmetrieachsen an. Allerdings würde auf diese Weise die Einfärbung verletzt. Man müsste also ohne Farben beginnen und nach den Spiegelungen die einzelnen Fünfecke einfärben.

Theoretische Umsetzung mit einem RGS

Dieses Nebeneinanderlegen von Kacheln enthält einen relationalen Aspekt: Zwei Kacheln stehen in der Relation zueinander, dass sie eine gemeinsame Seite besitzen. Mit einem RGS ließe sich dieses Nebeneinanderlegen realitätsnah auf der Softwareebene abbilden, wenn es einen „Lego-Modus“ gäbe:

1. Erzeuge vier identische Exemplare des Fünfecks aus Abbildung 161.
2. Übermittle die Bedingungen, dass sich je zwei passende Seiten berühren.
3. Fasse vier Fünfecke als Makro „Sechseck“ zusammen.
4. Erzeuge zwei Exemplare dieses Sechsecks.
5. Übermittle die Bedingung, dass sich je zwei passende Seiten der Sechsecke berühren.
6. Wiederhole die Schritte 4 und 5 bis die Parkettierung groß genug ist.

Liegt die Konfiguration in einem RGS vor, so kann sie im Zugmodus exploriert werden: Wie viel Freiheit ist in der Konfiguration enthalten? Kann man zum Beispiel den oberen Innenwinkel des Fünfecks derart verändern, so dass die neue Parkettierung lückenlos und überdeckungsfrei bleibt?

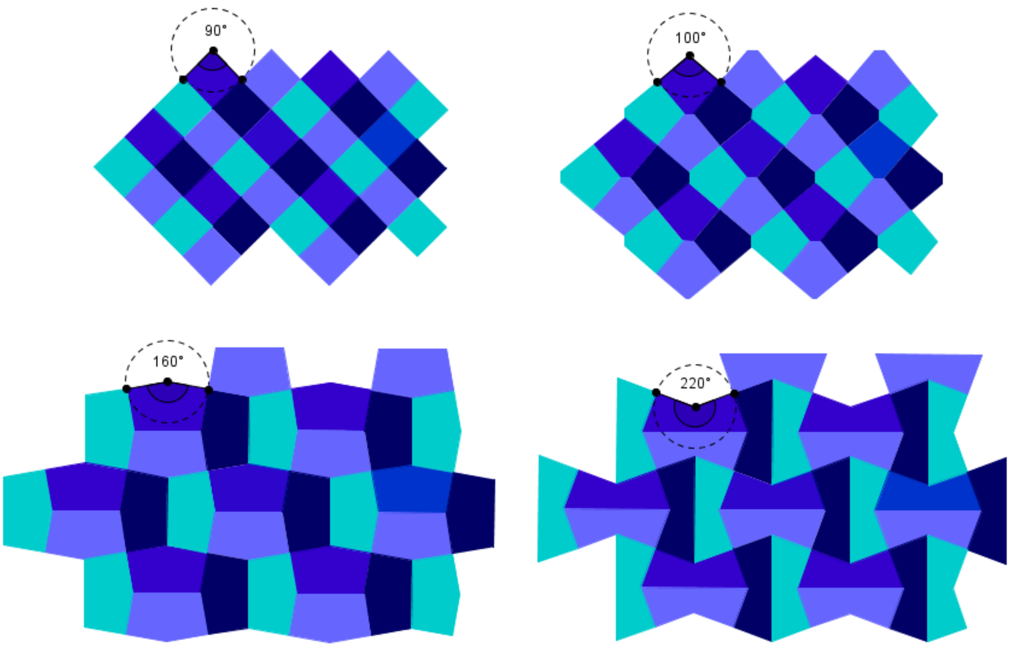


Abbildung 166: Variationen der Kairo-Parkettierung mit verschiedenen Ausgangswinkeln

Augenscheinlich bleibt die Parkettierung lückenlos und überdeckungsfrei. Die mathematische Begründung gibt der obige Satz: Das Sechseck bleibt punktsymmetrisch und mit einem derartigen Sechseck kann die Ebene parkettiert werden. Bei einem Winkel von 240° liegt strukturell wieder die ursprüngliche Kairo-Parkettierung mit Ausnahme der Einfärbung vor. Unabhängig von der Verwendung von DGS oder RGS liefert die Konfiguration der Abbildung 166 im Zugmodus eine prägnante Erfahrung für das funktionale Denken: Eine lokale Änderung des Winkels setzt sich global auf die gesamte Parkettierung fort.

Beispiel 3: Komplexe Parkettierung. mit gegebener Gitterstruktur

Wir diskutieren nun eine komplexere Parkettierung, sowohl konstruktiv als auch relational. Die Grundkachel in Abbildung 167 und die zugehörigen Hilfslinien der Konstruktion habe ich aus [Sutton07, S. 19] entnommen und mit GeoGebra nachkonstruiert.

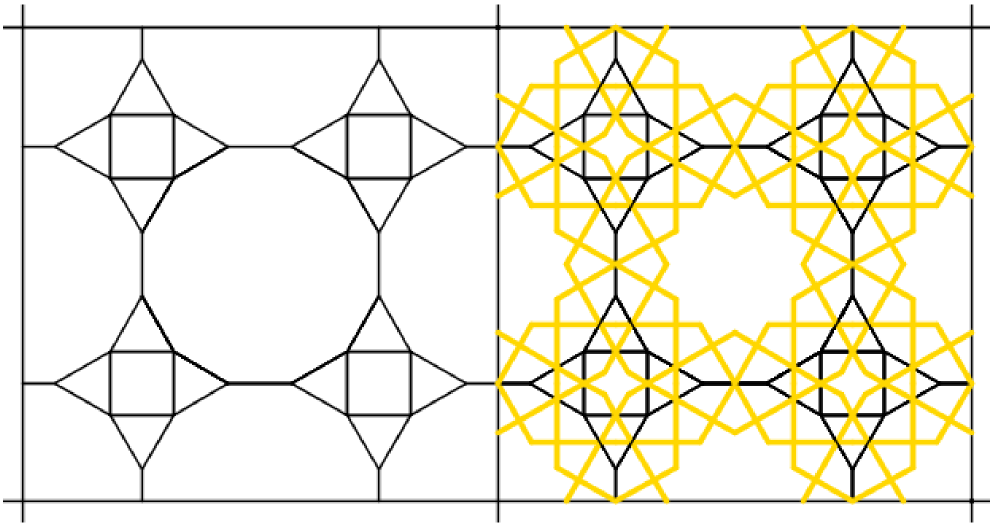


Abbildung 167: Gitterstruktur (links) und überlagertes Muster (rechts) des Grundbausteins

Das konstruktive Nachbauen eines solchen Grundbausteins lässt sich in zwei Etappen gliedern: Zuerst wird die Symmetrie beschrieben, danach wird der Grundbaustein auf einen minimalen Teil reduziert.

Beschreibung der Symmetrie des Grundbausteins

Der Grundbaustein besitzt vier Hauptsymmetrieachsen, die durch den Quadratmittelpunkt verlaufen: Die Horizontale, die Vertikale und die beiden Diagonalen. Darüber hinaus existieren weitere Symmetrieachsen des geviertelten Grundbausteins.

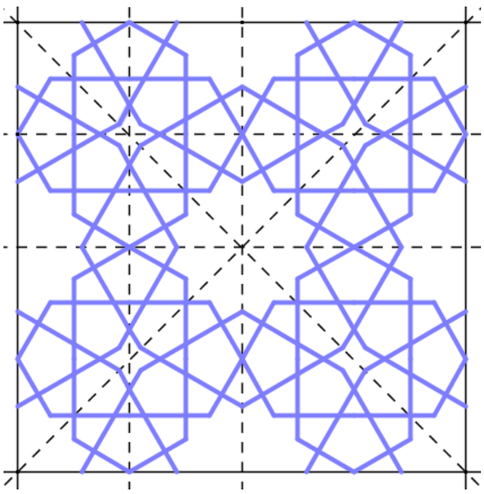


Abbildung 168: Der Grundbaustein der Parkettierung mit strichlierten Symmetrieachsen

Reduzierung des Grundbausteins auf einen minimalen Teil

Es existiert ein minimaler Teil, aus dem der Grundbaustein und damit die spätere Parkettierung durch Verwendung der Symmetrie konstruiert werden kann:

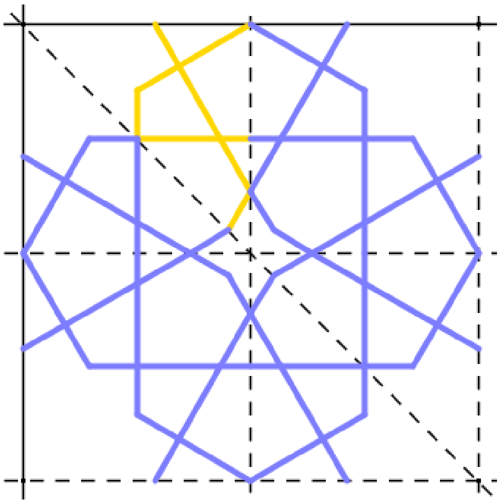


Abbildung 169: Ein Viertel des Grundbausteins und der minimale Teil (goldgelb) des Grundbausteins

Der minimale Teil (goldgelb) des Musters befindet sich in der Hälfte eines Viertels eines Viertels des Grundbausteins. Somit lässt sich diese Parkettierung mit Hilfe der Gitterstruktur und den Symmetrieachsen ohne Informationsverlust auf ein Zweiunddreißigstel komprimieren.

Stellen Sie sich nun vor, wie dieser minimale Teil durch hintereinander ausgeführte Spiegelungen an einer Diagonalen, einer Vertikalen und einer Horizontalen „aufklappt" und sich dabei das Muster exponentiell vergrößert:

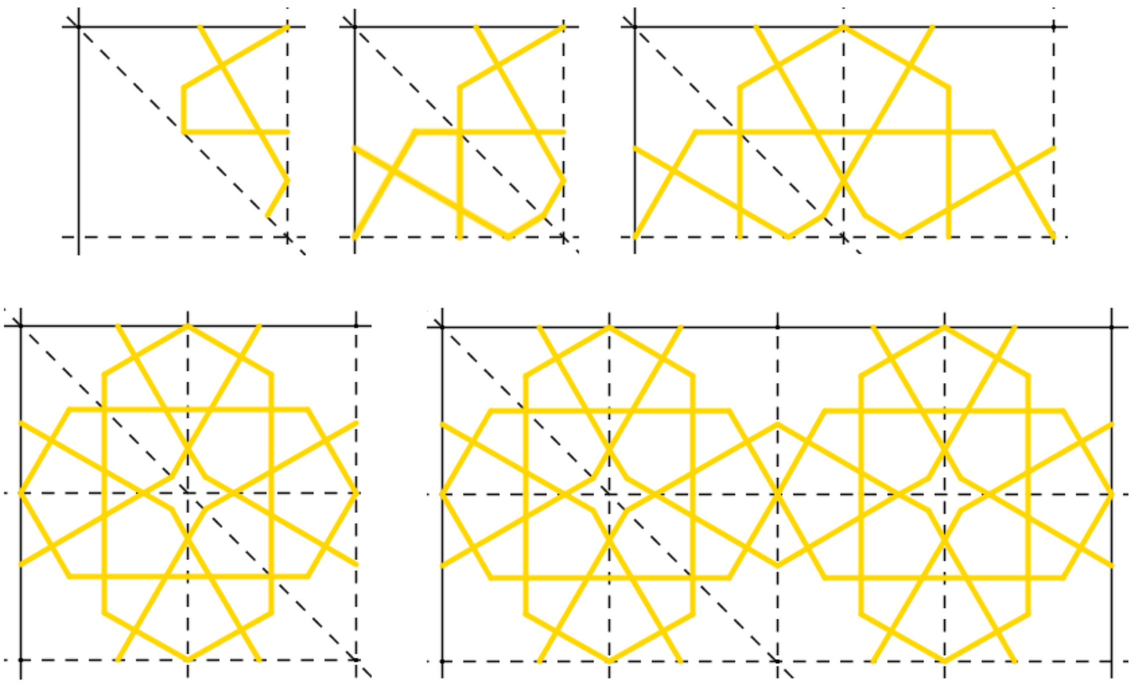


Abbildung 170: Der Grundbaustein entsteht durch hintereinander ausgeführte Spiegelungen aus dem minimalen Teil.

Ausgehend von dem minimalen Teil ist der Grundbaustein nach fünf Spiegelungen fertig:

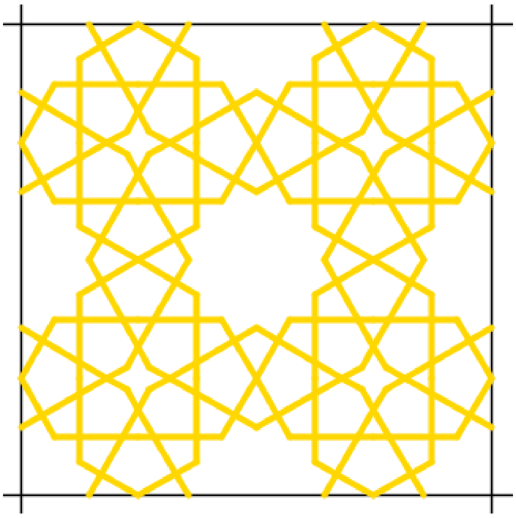


Abbildung 171: Der Grundbaustein ist aus dem minimalen Teil entstanden.

Die zugehörige Parkettierung entsteht nun durch weitere Spiegelungen des Grundbausteins bzw. durch bündiges Aneinandersetzen weiterer Grundbausteine zu einem Parkett.

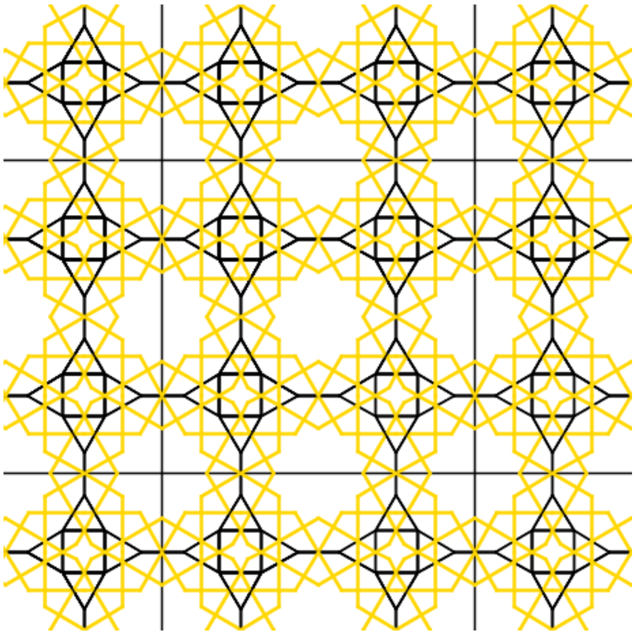


Abbildung 172: Das Parkett entsteht, in dem Grundbaustein neben Grundbaustein gelegt wird.

Diese Erfassung und das Nachkonstruieren des Grundbausteines bzw. des Musters schätze ich didaktisch ergiebig ein, da mehrere Aspekte betroffen und miteinander kombiniert werden:

1. die fundamentale Idee der Optimierung bzw. das Prinzip der minimalen Information,
2. die fundamentale Idee der Symmetrie,
3. exponentielles Wachstum,
4. Möglichkeit für Lernende, eigene Bezeichnungen vorzuschlagen und
5. Nachkonstruieren als Problemlöseprozess.

Die ersten drei Aspekte sind anschaulich klar, wir gehen auf die beiden letzten näher ein:

Lernende erhalten hier die seltene Gelegenheit, **eigene** Begriffe[20] zu ersinnen, sowohl für die Tätigkeiten als auch die geometrischen Objekte. Der minimale Teil könnte auch „Keimzelle" genannt werden. Zur Begriffsbildung schreibt FREUDENTHAL 1973 im zweiten Band seines Buches Mathematik als pädagogische Aufgabe:

> „*Guter Geometrie-Unterricht könnte viel bedeuten; einen Gegenstand ordnen zu lernen, und zu lernen, was Ordnung ist, das Begriffsbilden zu lernen, und zu lernen, was Begriffsbildung ist, das Definieren zu lernen, und zu lernen, was eine Definition ist, die Schüler erfassen zu lassen, warum die Ordnung, Deduktion, Definition besser als die andere ist.*" [Freudenthal73, S. 389]

Für eine **Konstruktion** der Gitterstruktur muss eine Reihenfolge der Ausführung gefunden werden: Was soll zuerst entstehen, das innere Zwölfeck oder die äußeren Drei- und Vierecke? Das Finden der Gitterstruktur und des Musters stellt einen Problemlöseprozess dar und ist für Lernende erreichbar, wenn das Konzept der Symmetrie hinreichend gefestigt und das Muster nicht zu komplex ist. Eine mögliche Konstruktion der Gitterstruktur in Abbildung 167 beginnt mit einem regelmäßigen Zwölfeck im Zentrum. Auf acht Seiten des Zwölfecks werden gleichseitige Dreiecke konstruiert. Danach folgen die kleinen Quadrate, auf deren Seiten wiederum gleichseitige Dreiecke erstellt werden. Die Musterlinien schließlich entstehen, indem Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke miteinander verbunden werden.

Relationale Sichtweise

Die relationale Sichtweise bietet einen alternativen Zugang zu diesen Mustern. Es existiert ein Bausatz für dieses Muster, der aus drei Basisteilen besteht. Diese können ähnlich wie beim Lego zusammengesetzt werden. Das ist typisch für das relationale Denken: Zuerst müssen die beteiligten Objekte erkannt bzw. definiert werden, dann werden die Objekte zueinander in Beziehung gesetzt: Der Schlüssel besteht in der Entsprechung zwischen einem Basisteil des Bausatzes und dem zugehörigen regelmäßigen N-Eck.

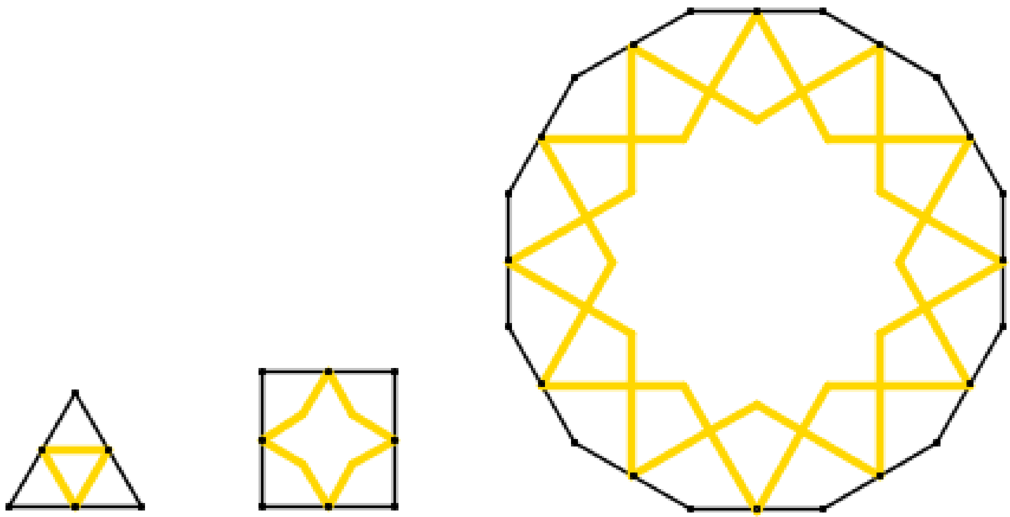


Abbildung 173: Zu den regelmäßigen N-Ecken (schwarz) korrespondieren bestimmte Sterne (goldgelb).

[20] Lehrkräfte können an dieser Stelle sicherlich mit Anekdoten aus der Praxis aufwarten. Einer meiner Schüler hatte beim Thema Eliminationsverfahren für LGS davon gesprochen, dass er eine Variable *zerstören* will. Für mich war das eine Gelegenheit, einzusehen, wie martialisch auch der Begriff *eliminieren* ist.

Bitte schauen Sie sich nun wieder Abbildung 167 und Abbildung 172 an und vollziehen Sie diese Entsprechungen nach. Die Musterlinien verlaufen über die N-Ecke hinweg bündig ineinander, da sie jeweils auf den Mittelpunkten der Seiten anfangen bzw. enden.

Mit diesem Bausatz verknüpft ist ein Algorithmus, der beschreibt, wie solche Muster erzeugt werden können:

Algorithmus für die Konstruktion solcher Muster

1. Erstelle eine Parkettierung. aus regelmäßigen N-Ecken mit $N = 3, 4, 6$ oder 12.[21]
2. Lege über jedes N-Eck das korrespondiere Basisteil des Bausatzes.

In der nächsten Abbildung sehen Sie einen weiteren Teil des Bausatzes: Es handelt sich um ein Hexagon mit korrespondierendem sechszackigen Stern.

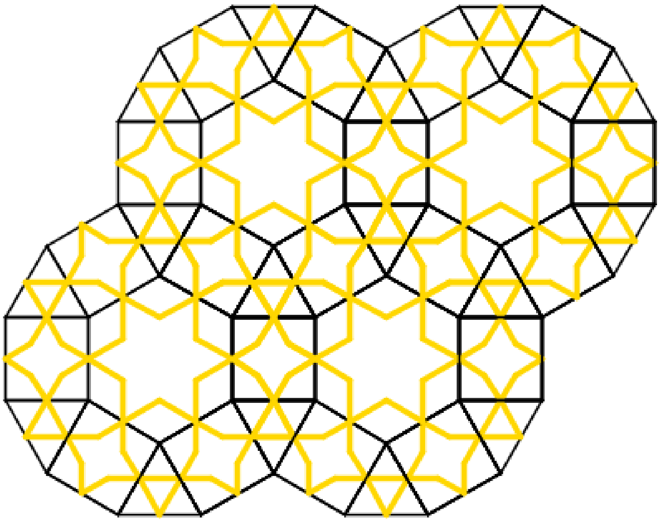


Abbildung 174: Ein Muster wird aus regelmäßigen Drei-, Vier- und Sechsecken erzeugt.

Solche Muster können veredelt werden, zum Beispiel durch eskortierende Parallelen oder durch Übergang zu einem geflochtenen System.

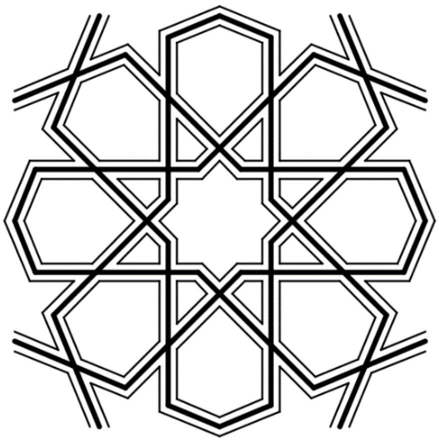


Abbildung 175: Eine Veredelung eines achtzackigen Sterns durch eskortierende Parallelen

[21] In [Willimann07, S. 5 ff.] finden Sie eine ausführliche Darstellung der Parkettierungen und insbesondere die Kombinationen von regelmäßigen N-Ecken, die eine lückenlose Überdeckung der Ebene liefern.

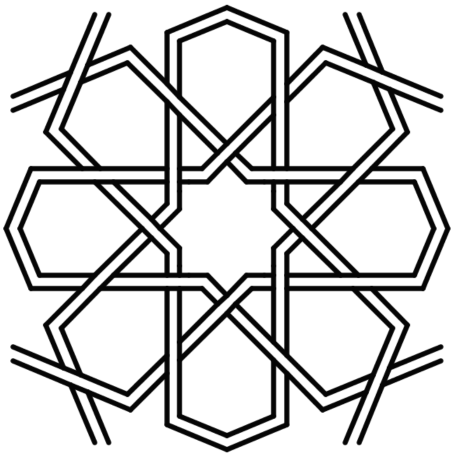


Abbildung 176: Ein geflochtenes System besteht aus einer Unten-Oben-Orientierung.

Hier muss sich bei beliebigem Durchlauf einer Linie immer „oben“ mit „unten“ abwechseln. Mittels eines geflochtenen Systems kann die Achsensymmetrie gegenüber der Drehsymmetrie abgegrenzt werden: Würde man einen minimalen Teil an Achsen spiegeln, dann würde diese Unten-Oben-Orientierung verletzt.

Sowohl die konstruktive als auch die relationale Betrachtung einer komplexeren Struktur schätze ich didaktisch ergiebig ein: Lernende erfahren hier, wie man *teilt und herrscht* und *Dingen auf den Grund geht*. Am Anfang sieht ein solches Muster kompliziert aus, aber durch eine systematische Analyse wird der Aufbau schließlich durchdrungen.

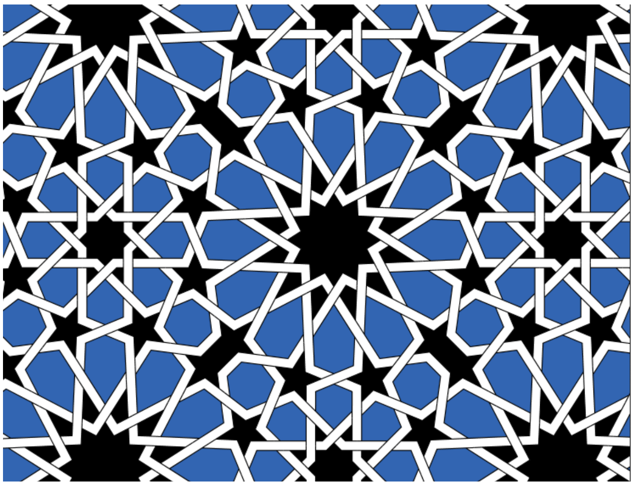


Abbildung 177: Ein komplexes Muster der Datenbank www.tilingsearch.org[22]

Parkettierungen können wie gesehen frei von Trigonometrie thematisiert werden. Positiv formuliert bedeutet das: Man kann jederzeit Trigonometrie zulassen, wenn man zum Beispiel Verhältnisse von Seitenabmessungen berechnen will.

Mit diesen Mustern haben uns unsere Vorfahren einen Schatz hinterlassen, um daraus zu schöpfen. Damit können wir über alle Kulturen hinweg geistig reich werden. Zur weiteren Lektüre empfehle ich [Bourgoin73], [Broug08] und [Critchlow76].

[22] Das Bild wurde unter http://www.tilingsearch.org/contents/data181/EGY1102.pdf mit freundlicher Genehmigung des Administrators, Herrn Brian Wichmann, entnommen. Den kulturellen Kontext dieses Musters finden Sie auf http://patterninislamicart.com/archive/1/172. Beide Links wurden zuletzt am 18. April 2016 aufgerufen.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir fassen in diesem Kapitel das didaktische Potenzial und die Grenzen von RGS zusammen. Als Ausblick besprechen wir, wie die Weiterentwicklung von RGS konzeptuell-theoretisch und auf Software-Ebene erfolgen kann.

6.1 RGS – didaktisches Potenzial und Grenzen

Wir greifen das in der Einleitung zitierte Beispiel von [Hölzl94, S. 90 ff.] wieder auf:

> „*Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A. Könnt ihr ein Quadrat ABCD konstruieren, so dass die Eckpunkte B und D auf g liegen?*"

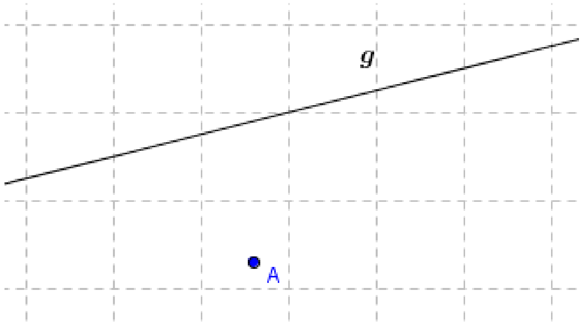


Abbildung 178: Ausgangssituation des Problems

Die konstruktive Lösung ist für Lernende mit wenig Erfahrung eine Herausforderung, denn es sind **drei** Objekte gesucht: die Punkte B, C und D. Mit welchem Punkt soll man beginnen und wie bestimmt man diesen?

Zur Lösung sind erfahrungsgemäß Hilfsobjekte nützlich, die die Symmetrie des Problems widergeben. Hier besteht ein Ansatz darin, vom Punkt A das Lot auf g zu fällen und damit *die Diagonale* des gesuchten Quadrates zu konstruieren:

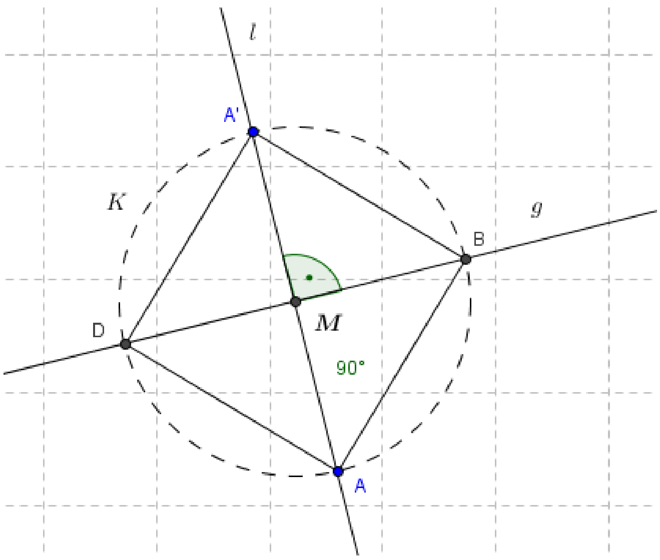


Abbildung 179: Eine mögliche Lösung beginnt mit dem Lot von A auf g.

Als Problemlöseprozess ist es für das Auffinden einer Konstruktion typisch, einen genauen Fahrplan vom Anfang bis zum Ende zu entwickeln. Irgendwie anzufangen und dann zu schauen, wie es weitergeht, ist mit Sackgassen verbunden. Das kann für Lernende frustrierend sein. Lehrkräfte können Hilfestellung leisten, aber mit einem RGS könnten Lernende sich selbst helfen, indem sie die gewünschte Konfiguration relational umsetzen und anschließend explorieren, um selbst zu einer Konstruktion zu gelangen. Wenn den Lernenden die Problematik der auseinander fallenden Konstruktionen bekannt ist, dann können sie ebenfalls mit einem DGS arbeiten. Entscheidend ist das Prinzip des Rückwärtsarbeitens: Man geht von der gewünschten Konfiguration (Endzustand) aus, studiert die Symmetrie und arbeitet sich hin zum Anfangszustand.

Ist das Rückwärtsarbeiten noch nicht hinreichend bekannt, so bietet ein RGS wie Geometry Expressions die Möglichkeit, die gesuchte Lösungskonfiguration aus Abbildung 179 relational umzusetzen:

1. Erzeuge eine Gerade g und einen Punkt A.
2. Erzeuge ein Viereck $ABCD$.
3. Übermittle die Bedingungen, dass alle Seitenlängen des Vierecks gleich lang sind.
4. Übermittle die Bedingung, dass zwei Seiten des Vierecks senkrecht zueinander stehen.
5. Übermittle die Bedingungen, dass die Punkte B und D mit der Geraden g inzidieren.

Die nächste Abbildung zeigt den Anfangs- und den Endzustand der Konfiguration:

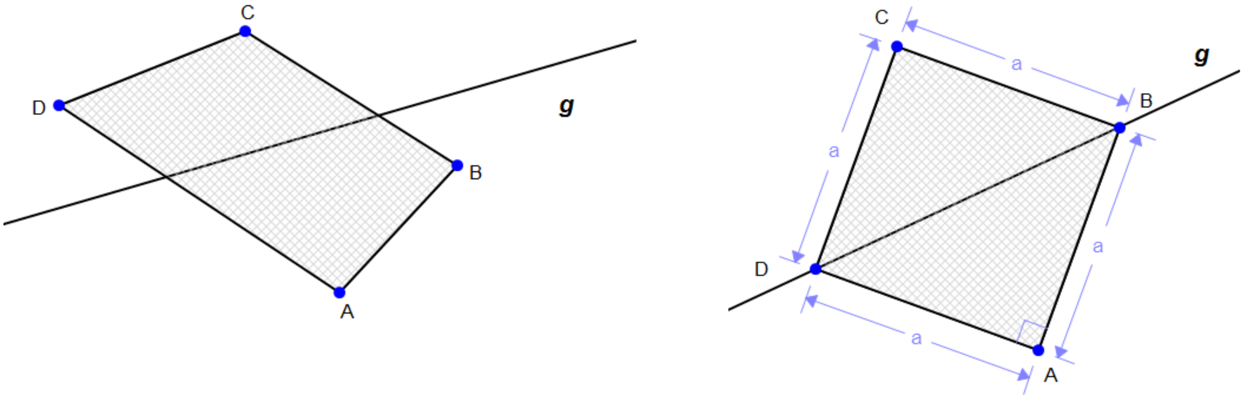


Abbildung 180: Die gewünschte Konfiguration wird mit Geometry Expressions umgesetzt.

Hier hat ein Lernender die Chance, zu verstehen, dass $\overline{BD}$ und $\overline{AC}$ die Diagonalen des gesuchten Quadrates sind. Mit dieser Erkenntnis kann dann eine Konstruktion gelingen.

Wir haben in den letzten Kapiteln gesehen, welche Lerninhalte und Konzepte mit Unterstützung von RGS umgesetzt werden können, allgemein und in Abgrenzung zu DGS. Kurz zusammengefasst sind das:

+ das Denken in Relationen,
+ das Erfahren des Konzeptes der Freiheitsgrade,
+ das Lernen von Eigenschaften von geometrischen Figuren (Haus der Vierecke) und
+ die selbständige Exploration.

Außerdem lässt sich ein RGS allgemein als Skizzen-Tool benutzen: Ein RGS liefert schnell präzise und virtuelle Skizzen einer Konfiguration. Durch Ausdruck kann das Medium gewechselt werden. Diese Option sollte immer im Blick behalten werden.

Als Grenzen von RGS sehe ich die folgenden Aspekte:

- Typische Problemlöseaufgaben der Geometrie sind Konstruktionsaufgaben, daher sind RGS eher ungeeignet, in dieser Richtung die Problemlösekompetenz zu fördern, es sei denn, es ist etwas auszurechnen oder herzuleiten.
- RGS können wie jede Software Schwächen besitzen: GE akzeptiert logisch vereinbare Bedingungen nicht (Abbildung 90 auf S. 81), das Hauptprinzip eines idealen RGS ist nicht für alle Konfigurationen erfüllt (Abbildung 180, S. 199, wenn anstatt einer Geraden g eine Strecke verwendet wird). Des Weiteren gibt es keine Rückmeldung über die Doppeldeutigkeit der SSW-Konfiguration (Abbildung 147 auf S. 172), ein Dreiecksinkreis kann zu einem Dreiecksankreis umspringen (Abbildung 76 auf S. 70) und Konfigurationen können nach Übermittlung von Bedingungen auf einen Benutzer willkürlich und verzerrt wirken (Abbildung 115 auf S. 107).
- Selbst ein zukünftiges RGS mit einem Lego-Modus zum virtuellen Zusammenstecken von geometrischen Objekten bietet Lernenden weder die Erfahrungen des haptischen Erfassens noch die der Zeichengenauigkeit

Unterschiede zwischen dem menschlichen Denken mit geometrischen Objekten und der Realisierung dieser Objekte innerhalb einer Software

Es bestehen prinzipielle Unterschiede zwischen dem menschlichen Denken mit geometrischen Objekten als Gegenstand des Geistes und der Realisierung dieser Objekte innerhalb einer Software: In einer Software ist *genau eine* Realisierung möglich und ein Benutzer muss sich entscheiden, wie er ein Objekt erstellen möchte. In der Vorstellung des menschlichen Denkens hingegen ist eine Änderung nicht nur möglich, sondern sogar üblich.

Beispiel 1: Dreieck

Ein Dreieck ABC kann aufgefasst werden als:

1. die Fläche, die von den drei Seiten begrenzt wird oder
2. die drei einzelnen Seiten $\overline{AB}$,$\overline{AC}$ und $\overline{BC}$.

In einer Geometriesoftware sind folgende Realisierungen eines Dreiecks denkbar:

1. mit dem Werkzeug Dreieck, dann liegt das Dreiecke als Fläche vor,
2. mit dem Werkzeug N-Eck, dann liegt das Dreieck ebenfalls als Fläche vor,
3. durch dreimalige Anwendung des Werkzeugs Strecke zwischen zwei Punkten.

Ein weiterer Unterschied zeigt sich darin, welche Objekte für den Benutzer möglicherweise schon in Gedanken existieren, für die Software hingegen nicht.

Beispiel 2: Schnittpunkt

Ein Benutzer erstellt mit DGS oder RGS zwei Strecken, die sich augenscheinlich in einem Punkt schneiden. Der Benutzer mag das so sehen, aber bei Verwendung einer Software muss der Schnittpunkt explizit erzeugt werden, damit er als Objekt zur Verfügung steht.

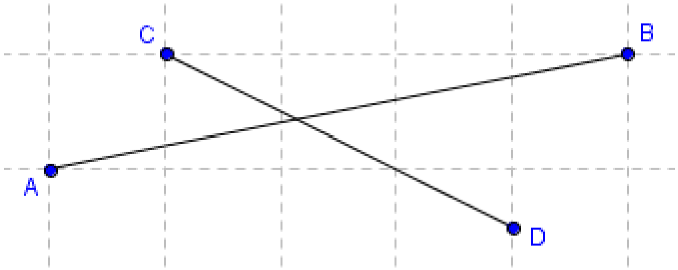


Abbildung 181: Die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ schneiden sich, aber der Schnittpunkt ist in der Software noch nicht erzeugt, also auch nicht vorhanden.

6.2 *Weiterentwicklung von RGS*

In diesem Unterkapitel werden mit Blick auf Geometry Expressions die beiden theoretischen Forschungsfragen der Arbeit beantwortet.

(F4) Wie kann RGS theoretisch-konzeptionell weiterentwickelt werden?

(F5) Wie kann Geometry Expressions als Vertreter eines RGS auf der Software-Ebene weiterentwickelt werden?

Wir besprechen zuerst die Weiterentwicklung auf theoretisch-konzeptueller Ebene.

6.2.1 Theoretisch-konzeptuell

Abgrenzung der Konzepte zeichnen, konstruieren, Relationen setzen

Mit Blick auf die Interviews empfiehlt sich bei der Einführung von RGS eine deutliche Abgrenzung der Konzepte zeichnen, konstruieren und Relationen bzw. Constraints setzen. Es hat sich ja in den Interviews wiederholt gezeigt, dass besonders die Konzepte zeichnen und konstruieren miteinander verwechselt wurden: In GE wurde auch konstruiert, in EUKLID wollten Probanden auch Bedingungen übermitteln. Diese Trennung sollte sowohl inhaltlich als auch der Softwareebene eingehalten werden.

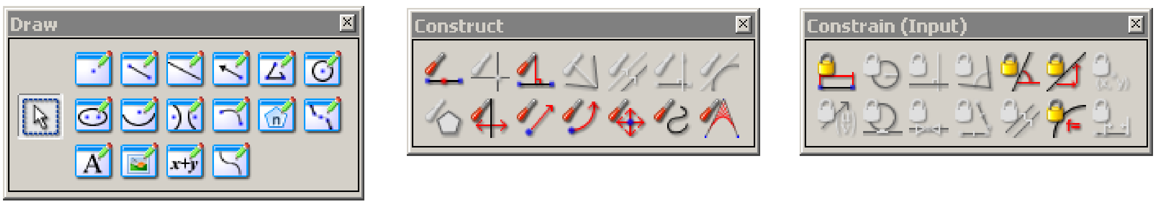


Abbildung 182: Die Werkzeugpaletten Draw, Construct und Constraint in GE

In Geometry Expressions liegt keine strikte Trennung dieser Konzepte vor. So liefert die Anwendung des Werkzeugs *Midpoint* aus der Palette *Construct* wie gewünscht den Mittelpunkt einer Strecke, aber gemäß dem Hauptprinzip der RGS lässt sich anschließend der Mittelpunkt im Zugmodus bewegen – im Widerspruch zum funktionalen Prinzip. Dieser Widerspruch lässt sich durch eine einfache Umbenennung mildern: Die Werkzeugpalette sollte nicht mit *Construct*, sondern mit *Generate* betitelt werden und nach Anwendung des betreffenden Werkzeugs sollten die gesetzten Relationen durch das System zurück gemeldet werden.

Makros

Makros sind fester Bestandteil der DGS. Bislang bietet zwar kein RGS die Möglichkeit zur Makrodefinition (Stand: Juli 2014), aber es sind in einem RGS zwei Arten von Makros denkbar: reine Relationsmakros und gemischte Makros. Reine Relationsmakros konfigurieren bereits existierende Objekte derart, dass eine Konfiguration entsteht, die die gewünschten Relationen erfüllt. Beispielsweise könnte man ein Makro definieren, welches als Eingabe ein Dreieck und einen Kreis erwartet und das dann diejenigen Relationen setzt, die zusammen implizieren, dass der Kreis der Inkreis (oder der Umkreis) des Dreiecks ist.

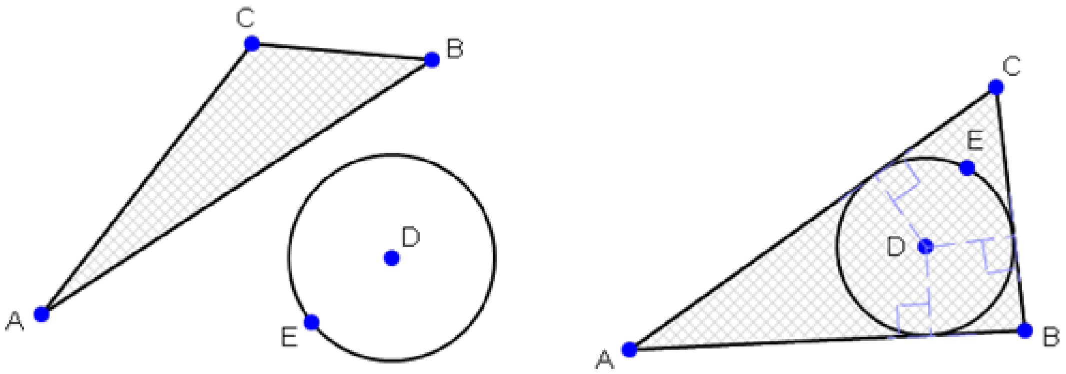


Abbildung 183: Illustration eines möglichen Relationsmakros Inkreis eines Dreiecks

Gemischte Makros gehen weiter, sie setzen nicht nur Relationen zwischen bereits existierenden Objekten, sondern erzeugen auch neue Objekte. In diesem Sinne könnte das obige Werkzeug *Midpoint* als einfaches Makro aufgefasst werden. Weiter könnte ein Drachen durch ein gemischtes Makro wie folgt realisiert werden: Ausgehend von einem beliebigen Viereck erzeugt das Makro die Diagonalen, stellt diese orthogonal zueinander und setzt weiter die Bedingung um, dass eine Diagonale durch die andere halbiert wird:

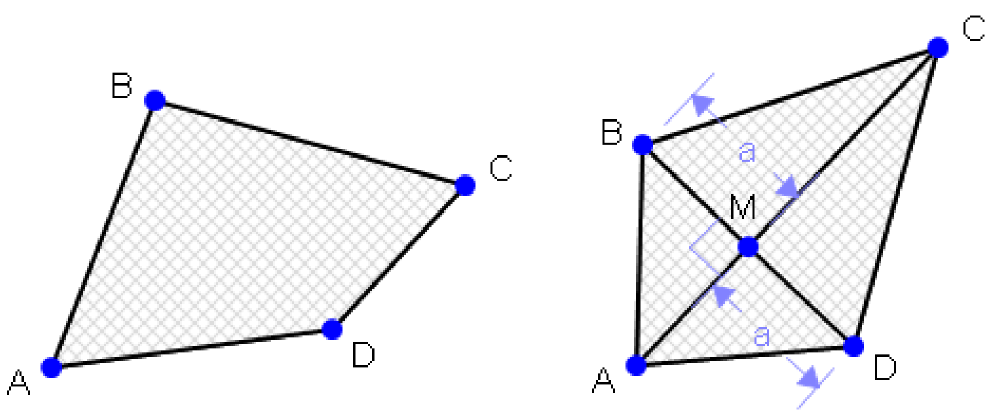


Abbildung 184: Illustration eines möglichen Relationsmakros Drachen

In Abbildung 184 sehen wir links ein allgemeines Viereck. Das Viereck rechts daneben entsteht aus dem ersten Viereck durch Anwendung eines fiktiven Makros *Drachen*. Das RGS teilt dem Benutzer mit, welche Bedingungen umgesetzt wurden: Die Strecken $\overline{BM}$ und $\overline{MD}$ sind gleich lang, das heißt eine Diagonale (hier $\overline{AC}$) halbiert die andere (hier $\overline{BD}$). Des Weiteren beträgt der Winkel $\sphericalangle AMB$ 90°. Während in einem DGS das Makrokonzept das funktionale Denken betont, würden benutzerdefinierte Makros in einem RGS das relationale Denken ansprechen, was für die Begriffsbildung nützlich ist. Wenn ein Benutzer zum Beispiel ein Relationsmakro „Quadrat“ erstellen möchte, dann muss er dem System mitteilen, welche Eigenschaften ein allgemeines Viereck haben muss, damit es zum Quadrat wird. Auf diese Weise kann das Haus der Vierecke thematisiert werden.

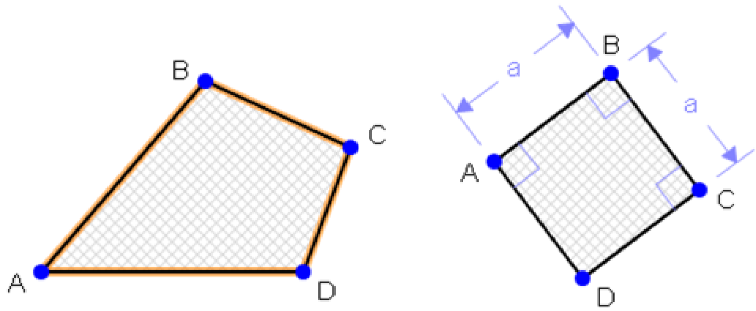


Abbildung 185: Illustration eines möglichen Relationsmakros Quadrat

Wir begeben uns nun auf die Software-Ebene und besprechen Weiterentwicklungsvorschläge für RGS.

6.2.2 Auf der Software-Ebene

Fehlerfreies Zusammenspiel von Relationen

Relationen, die sich nicht logisch widersprechen, sollten von einem RGS angenommen und umgesetzt werden. Die Tatsache, dass das bei GE nicht immer erfüllt ist, ist ein gravierender Nachteil, da dies von Lernenden kaum akzeptiert wird. Ebenso sollten redundante Relationen von einem RGS als solche erkannt werden und nicht zu einer Fehlermeldung führen. Außerdem sollte es möglich sein, ein Objekt mit mehreren Constraints zu versehen.

Algebraische Berechnungen – aber nur, wenn diese der Vereinfachung dienen

Geometry Expressions ermöglicht sowohl numerische Berechnungen („Messen“) als auch symbolische. Leider ist es bei den symbolischen Berechnungen oft so, dass sperrige, für die Unterrichtspraxis unbrauchbare Formeln ausgegeben werden:

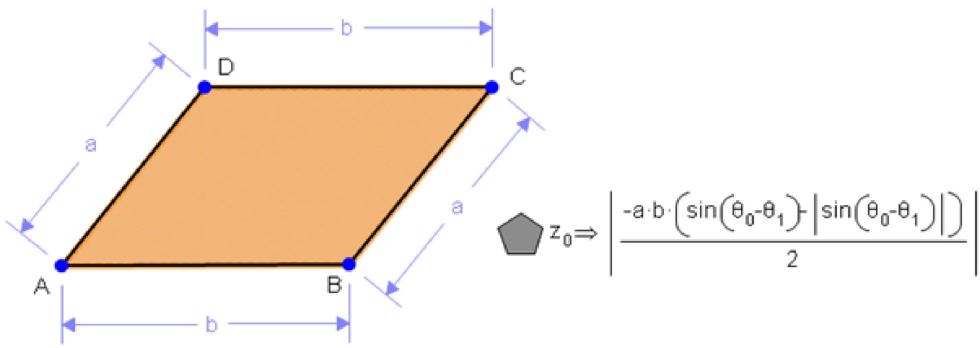


Abbildung 186: Geometry Expressions gibt eine formal korrekte, aber sperrige Formel aus.

Solche abstrakten Ergebnisse sind für Lernende nicht nur abschreckend, sondern auch irreführend: Mit unnötig komplexen Termen dieser Art wird die innere Einstellung gefördert, den Formelkoffer nur prall genug zu füllen, um ein Problem zu erschlagen, aber nicht die Motivation, Sachverhalte zu ergründen. Nebenbei sei erwähnt, dass Geometry Expressions nicht angibt, wo die Winkel θ_0 und θ_1 in der Konfiguration vorkommen. Hier sieht man: Software kann formal korrekte, aber praktisch unbrauchbare Lösungen liefern, denn für Lernende ist eine Ausgabe, die sie nicht interpretieren können, wertlos.

Relationsprotokoll und relationaler Abhängigkeitsgraph

So wie es in einem DGS ein Konstruktionsprotokoll gibt, so könnte es in einem RGS ein Relationsprotokoll geben. Ein solches wäre eine textuelle Beschreibung der erzeugten Objekte und die zwischen diesen Objekten gesetzten Relationen der Konfiguration.

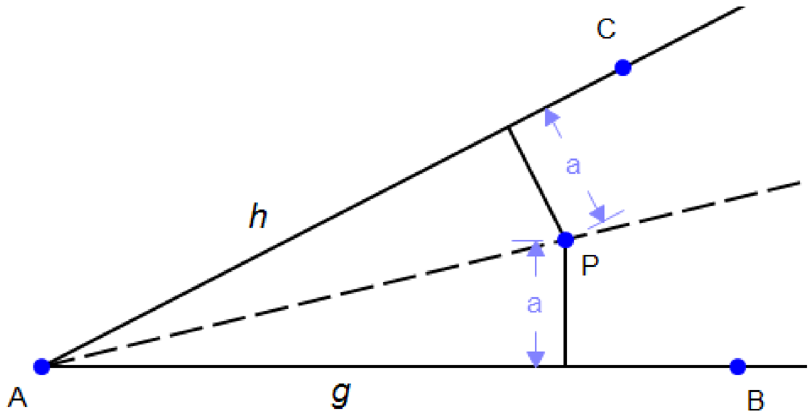


Abbildung 187: Beispielkonfiguration für ein Relationsprotokoll

Mit einem Relationsprotokoll würden ikonische Symbole in der Konfiguration wie zum Beispiel Orthogonalität ⊥ in einer anderen Darstellungsebene zusammengefasst. Wir formulieren es für die obige Konfiguration.

1. A,B,C und P sind freie Punkte.
2. g ist der Halbstrahl beginnend bei A durch B.
3. h ist der Halbstrahl beginnend bei A durch C.
4. P hat von h den Abstand a.
5. P hat von g den Abstand a.

In der umgesetzten Konfiguration lässt sich P nur noch auf der Winkelhalbierenden von g und h bewegen. Daneben könnte es in einem RGS ebenfalls einen Relationsgraphen geben, der die Objekte und die zwischen ihnen geltenden Relationen graphisch widergibt so wie in Abbildung 79 auf S. 71.

„Lego-Modus“

Die Bezeichnung „Lego-Modus“ benutzt die Assoziation an die gleichnamigen Bausteine für kleine und große Kinder: In einem solchen Modus werden Objekte zusammen gesteckt, indem zwei Seiten zweier Objekte zur Deckung gebracht werden oder zwei Punkte zum Inzidieren gebracht werden. Das erleichtert das Explorieren und Probieren gegenüber einem DGS. Bei einem DGS könnten natürlich Objekte direkt zusammengesteckt konstruiert werden, aber das

Abtrennen und Andocken an einer anderen Stelle ist in dieser Form nicht möglich. Typische Anwendungen für den Lego-Modus ergeben sich beim Tangram und bei den Parkettierungen:

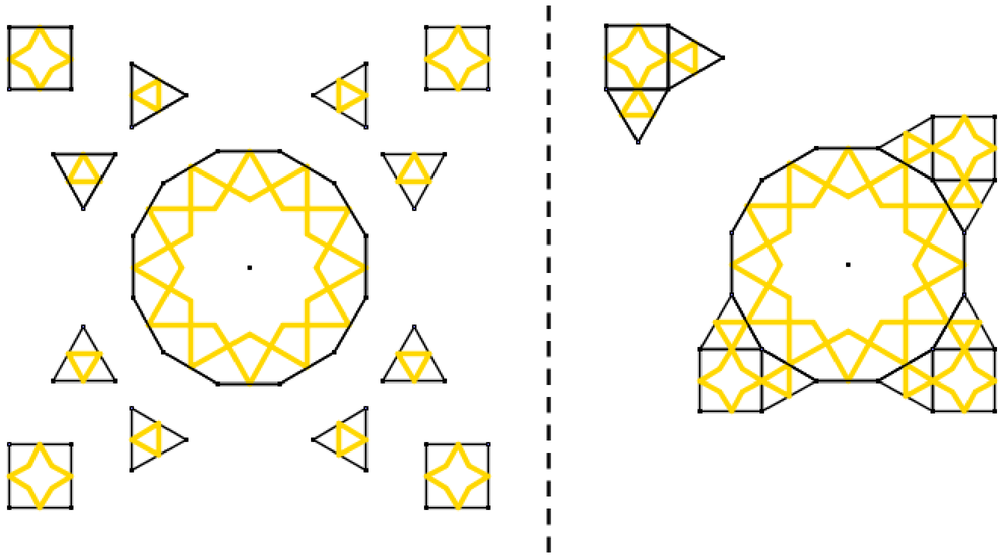
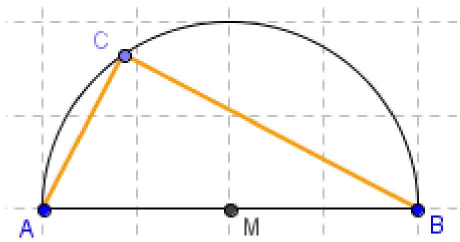


Abbildung 188: Einzelne Bauteile (links) werden im Lego-Modus (rechts) zusammengesteckt.

Die Grundbausteine können auf vielfältige Weise zu einem Muster zusammengesteckt werden. Lernende bauen so ein vorgegebenes Muster nach oder finden ein eigenes.

Umsetzung weiterer relationaler Werkzeuge

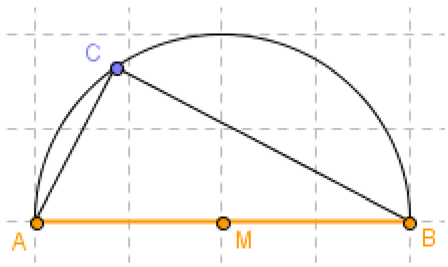
Interessant wäre ein Werkzeug *Relation zweier Objekte*, welches zwei ausgewählte Objekte zueinander in Beziehung setzt, zum Beispiel zur Prüfung von typischen Beziehungen wie Inzidenz, Orthogonalität und Parallelität. Ein solches Werkzeug würde die Möglichkeiten der Exploration einer gegebenen Konfiguration erweitern. Das könnte so aussehen: Ein Benutzer klickt in einer Konfiguration zwei Objekte an, diese werden farbig hervorgehoben. Dann wählt er das Werkzeug *Relation zweier Objekte* aus und bekommt vom System die Information der bestehenden Beziehung:



Ausgewählte Objekte: **Strecke $\overline{AC}$**, **Strecke $\overline{BC}$**

Bestehende Relation: $\overline{AC}$ steht senkrecht zu $\overline{BC}$.

Abbildung 189: Illustration eines Werkzeugs *Relation zweier Objekte*



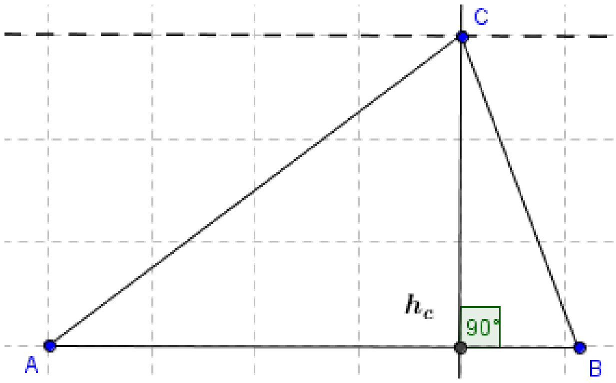
Ausgewählte Objekte: **Strecke $\overline{AB}$**, **Punkt M**

Bestehende Relation: M ist Mittelpunkt von $\overline{AB}$.

Abbildung 190: Gleiche Konfiguration, Auswahl von M und $\overline{AB}$

Dieses Werkzeug *Relation zweier Objekte* sollte mit dem Relationsprotokoll abgestimmt sein: Es kann vorkommen, dass mehrere Relationen existieren, wenn zum Beispiel zwei Geraden parallel zueinander sind und einen bestimmten Abstand voneinander besitzen. Es kann auch das andere Extrem vorkommen, dass keine Relation zwischen den ausgewählten Objekten besteht. Das alles muss bei der Umsetzung eines solchen Werkzeugs berücksichtigt werden.

Weitere Einschränkungen sollten in einem RGS umgesetzt werden, zum Beispiel für den Flächeninhalt eines Dreiecks und eines Rechtecks. Damit lassen sich die Scherung und die Hyperbel als Ortslinie entdecken und veranschaulichen:



Einschränkungen:

A,B haben feste Koordinaten.

$F(\Delta ABC) = konstant$

Abbildung 191: Entdeckung der Scherung durch Einschränkung an den Flächeninhalt des Dreiecks

In der Konfiguration der obigen Abbildung wurden an das Dreieck ABC die Einschränkungen übermittelt, dass die Punkte A und B feste Koordinaten besitzen und dass der Flächeninhalt konstant gehalten werden soll. Das hat zur Folge, dass sich der Punkt C nur noch auf der Parallelen zu $\overline{AB}$ durch C bewegen lässt. Bewegt man C entlang dieser Parallelen, so ändert sich die Höhe h_c nicht. Die Grundseite $\overline{AB}$ ändert sich ebenfalls nicht. Folglich bleibt der Flächeninhalt F des Dreiecks konstant.

Mit der nächsten Konfiguration können Lernende die Hyperbel als Ortslinie entdecken.

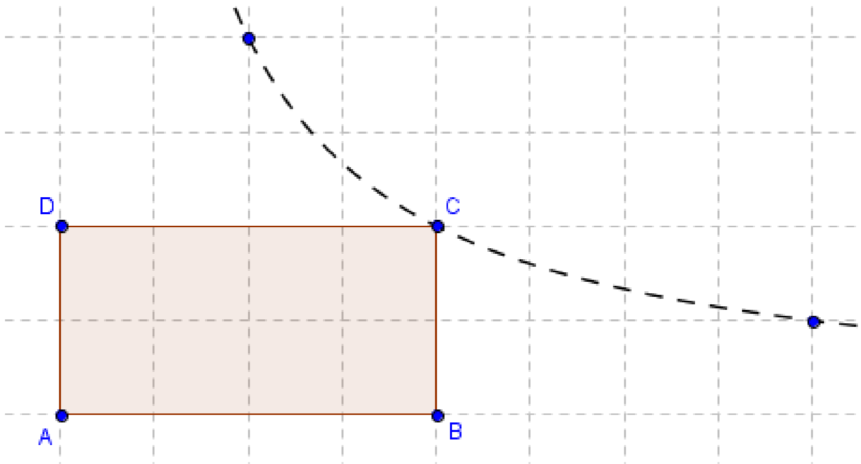


Abbildung 192: Die Hyperbel entsteht als Ortslinie durch die Einschränkung, dass der Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$ konstant ist.

In der Konfiguration der Abbildung 192 besitzen die Punkte A,B und D feste Koordinaten. Zusätzlich sei der Flächeninhalt des Rechtecks auf einen konstanten Wert festgelegt. Dann kann der Punkt C nur noch auf der strichlierten Hyperbel bewegt werden.

Diese Beispiele lassen sich zwar auch mit einem DGS behandeln, aber erfahrungsgemäß nur mit einer Konfiguration, die von einer Lehrkraft vorgegeben wurde.

GeoGebra verfügt über ein relationales Werkzeug *Punkt auf Objekt*, das das Werkzeug *Punkt auf Linie* verallgemeinert. Als Objekte sind N-Ecke zugelassen. Eine didaktische Anwendung dieses Werkzeugs ergibt sich etwa mit Bezug zur Algebra: Lernende können zum Beispiel explorieren, welcher algebraische Zusammenhang zwischen den Koordinaten eines Punktes innerhalb eines Dreiecks besteht.

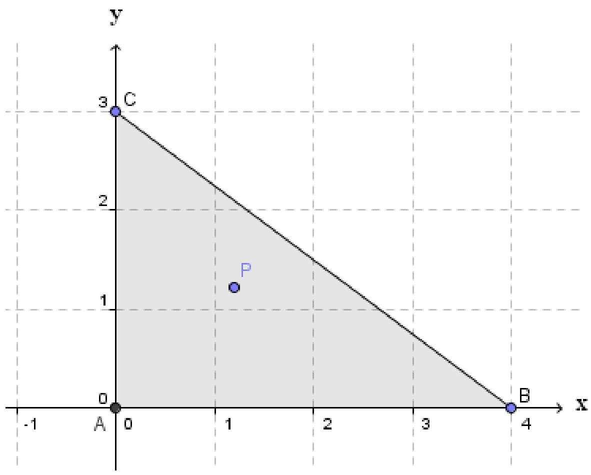


Abbildung 193: Der Punkt P lässt sich als *Punkt auf Objekt* innerhalb des Dreiecks ABC verschieben.

Sowohl für RGS als auch für DGS interessant finde ich ein *Werkzeug zur Schnittflächen-erzeugung*, mit dem man auch bogenförmige Schnittmengen von Flächen einfärben kann. Das eröffnet für den Unterricht zahlreiche Möglichkeiten, zum Beispiel das Nachbauen oder Erfinden von Logos, Symbolen oder Parkettierungen. Dadurch wird das Denken in Strukturen gefördert, außerdem darf Mathematik und Mathematikunterricht bunt sein.

Ohne dieses Werkzeug ist man auf den Trick angewiesen, runde Schnittflächen durch ein N-Eck mit hinreichend großem N anzunähern und letzteres einzufärben.

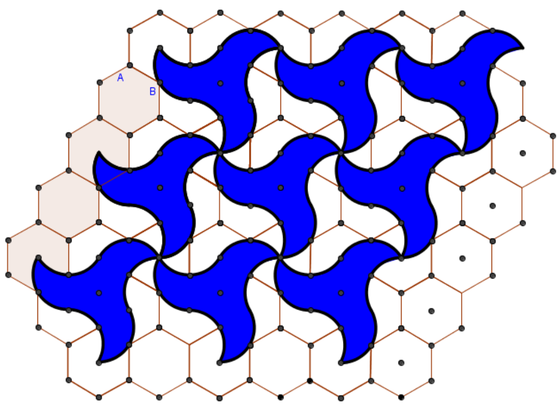


Abbildung 194: Ausfüllen von bogenförmig berandeten Schnittflächen

Ebenfalls interessant sowohl für ein DGS als auch ein RGS ist die Möglichkeit, **eigene** Kommentare in das Konstruktions- bzw. Relationsprotokoll einzugeben. Damit könnten Lernende hilfreiche Notizen hinzufügen oder Lernende beschreiben die gesamte Konstruktion bzw.

Komposition. Das fördert die Fähigkeit, sich präzise auszudrücken und eine Lehrkraft erhält mehr Informationen zum Gedankengang des Lernenden.

Für den Kontext Optimierung ist ein Werkzeug *minimiere* bzw. *maximiere* hilfreich. Ein Benutzer wählt eine Größe aus und entscheidet dann, ob diese durch das Programm minimiert oder. maximiert werden soll. Typische Konfigurationen und Fragestellungen hierzu lauten beispielsweise:

- Abstand eines Punktes zu einer Parabel,
- Rechteck mit größtem Flächeninhalt in einem Halbkreis,
- gleichschenkliges Dreieck mit größtem Flächeninhalt in einem Kreis,
- Dreieck mit kleinstem Flächeninhalt um einen Kreis.

Wichtig für diese Werkzeuge ist, dass das System dem Benutzer relevante Informationen zurückmeldet, so dass das Problem anschließend beleuchtet werden kann.

Ebenfalls in den Kontext Optimierung, genauer gesagt lineare Optimierung, passt für RGS mit Algebra-Schnittstelle die Möglichkeit, ein Gebiet durch lineare Ungleichungen einzuschränken.

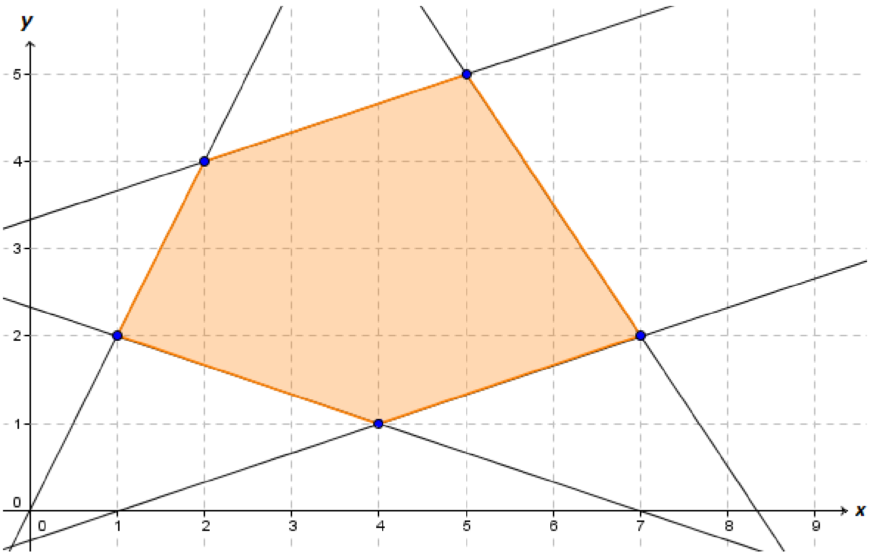


Abbildung 195: Ein Zielgebiet entsteht durch lineare Ungleichungen.

Bei Bedingungen in Gleichungs- oder Ungleichungsform sind mehrere Abstraktionsstufen sinnvoll. Wir betrachten das Beispiel zweier Punkte A und B mit vorgegebenem Abstand 5. Auf der einfachsten Abstraktionsstufe lautet die Abstandsbeziehung in Form einer Relation:

$$Abstand(A, B) = 5.$$

Diese Pseudocode-Form ist der Umgangssprache und dem Kontext Geometrie am nächsten. Sind die Punkte A und B durch ihre Ortsvektoren gegeben, so lässt sich diese Gleichung auch anschreiben als:

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|_2 = 5.$$

Bei der zweiten Gleichung wird zwar konkreter formuliert, wie der Abstand mathematisch zu berechnen ist, allerdings wird diese Beschreibung durch die Norm $\|\cdot\|_2$ etwas abstrakter. In der nächsten Abstraktionsstufe schließlich benutzt man die Koordinaten der beiden Punkte:

$$\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} = 5.$$

Professionelle Designprogramme wie zum Beispiel Adobe Illustrator schlagen dem Benutzer potenzielle Hilfslinien und ein „intelligentes“ Einrasten auf möglichen Ankerpunkten vor. Diese beiden Funktionalitäten sind auch für RGS und DGS denkbar.

Mit einem RGS für drei Dimensionen lassen sich die Möglichkeiten der Exploration und das Konzept der Freiheitsgrade auf den Raum erweitern. STEINWANDEL und LUDWIG untersuchen unabhängig von RGS, welche Auswirkungen drei unterschiedliche Arbeitsumgebungen (Bildumgebung, interaktive Computersimulation bzw. Pappmodell) auf das Erkennen und Bearbeiten räumlicher Strukturen haben:

> *„Es kristallisiert sich heraus, dass die Arbeitsumgebung „Modell“ den anderen beiden Präsentationsformen (Bild bzw. interaktive Computersimulation) in weiten Teilen überlegen ist.“* [Steinwandel/Ludwig11, S. 173]

Dementsprechend sollte ein Softwareeinsatz in drei Dimensionen durch Körpermodelle flankiert werden. Konkret könnten Lernende dann mit einem 3D-RGS zum Beispiel folgende Fragen bzw. Situationen explorieren:

1. Welche Kombinationen welcher Größen beschreiben eine Ebene im Raum?
2. Welche Sätze der ebenen Geometrie gelten auch in drei Dimensionen, welche nicht und warum ist das so?[23]
3. Wie entstehen die Kegelschnitte?
4. Welche Beziehungen gelten für die DANDELINschen Kugeln der Kegelschnitte?

[23] Zur weiteren Lektüre sei hier auf [Schumann07] verwiesen.

6.3 Schlussgedanken

Bislang wurde dem funktionalen Denken viel Beachtung geschenkt, aber es ist sinnvoll, die relationale Sichtweise stärker in der Unterrichtspraxis zu kultivieren, um verschiedenen Lerntypen gerecht zu werden. Außerdem ermöglicht die Kombination beider Sichtweisen das gründliche Erfassen einer Konfiguration oder eines Sachverhaltes.

Die besprochenen islamischen Muster lassen sich aus einzelnen Bauteilen zusammensetzen, ähnlich wie beim Lego. Der Schlüssel besteht in der Entsprechung zwischen einem Bauteil und dem zugehörigen regelmäßigen N-Eck der Gitterstruktur. Das ist die relationale Sichtweise und ein leichter Zugang zu diesen Parkettierungen. Bei der funktionalen Sichtweise hingegen blickt man auf eine Konstruktion: Die Symmetrie zusammen mit der Keimzelle ermöglicht wiederholte Spiegelungen bzw. Drehungen, das Muster klappt auf. Das ist für mich eine schöne Verbindung zwischen Geometrie und exponentiellem Wachstum. Bei der Kairo-Parkettierung mit einem Winkel als Freiheitsgrad machen Lernende weiter eine prägnante Erfahrung für das funktionale Denken: Eine lokale Änderung des Winkels setzt sich global auf die gesamte Parkettierung fort.

Der Einsatz von Software zieht sich themenbedingt als roter Faden durch diese Arbeit. Zum Schluss möchte ich davon Abstand gewinnen und Gedanken formulieren, die mir darüber hinaus wichtig sind.

Taschenrechner und Software werden immer leistungsstärker. Mit WolframAlpha ist bereits ein System verfügbar, das Antworten auf fachliche Fragen ausgeben kann:

Abbildung 196: Ist $2^{67} - 1$ eine Primzahl?

Als Antwort gibt WolframAlpha aus:

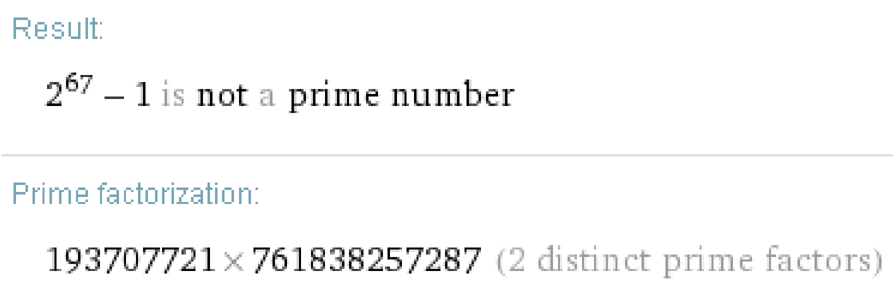


Abbildung 197: WolframAlpha gibt die Antwort mit einer Begründung aus.

Die Antwort wird sogar begründet: Wegen der Primfaktorzerlegung kann $2^{67} - 1$ keine Primzahl sein. Schauen wir uns eine Frage aus dem Kontext Geometrie an. Ein Benutzer möchte Informationen zu dem Dreieck mit den Seitenlängen 5 LE, 12 LE und 13 LE.

Abbildung 198: WolframAlpha soll Informationen zu einem Dreieck ausgeben.

Hier sieht ein Benutzer in der Ausgabe zuerst eine visuelle Darstellung des Dreiecks und darunter folgende Informationen:

Triangle shape:

right triangle

Properties:

circumradius	$\frac{13}{2} = 6.5$
inradius	2
area	30

Abbildung 199: Eigenschaften des Dreiecks (Bildausschnitt)

Es handelt sich also um ein rechtwinkliges Dreieck, was allerdings nicht begründet wird. Gleichwohl ist WolframAlpha offenbar ein mächtiges Werkzeug, um schnell Eigenschaften eines Dreiecks zu erhalten. Auch mit Google kann man nach mathematischen Inhalten suchen:

Abbildung 200: Google interpretiert Tipp- und Schreibfehler.[24]

Google ist offenbar tolerant gegenüber Tipp- und Schreibfehlern, genauer gesagt legt Google ein Benutzerprofil an und interpretiert Eingaben auf dessen Grundlage. In gewisser Weise werden Lernende dadurch verhätschelt: Es ist gar nicht nötig, den Suchbegriff vollständig einzugeben, Google bietet automatisch mehrere Vorschläge einer Vervollständigung an; jedoch sollten Lernende als höheres und soziales Lernziel dazu angehalten werden, sich präzise auszudrücken, idealerweise in vollständigen, zusammenhängenden Sätzen.

Taschenrechner, Computer und Software werden also immer leistungsstärker, das Internet als riesiges Nachschlagewerk wächst jede Minute und ein RGS reduziert Konstruktionen bei Bedarf auf Bedienerwissen. All das mag im Berufsleben angenehm sein, aber für den Mathematikunterricht darf daraus nicht kurzsichtig gefolgert werden, dass händische Verfahren fortan als redundant zu betrachten sind. Das höhere Bildungsziel von Mathematikunterricht besteht nach EIGENMANN darin, das Denken zu üben, vgl. [Eigenmann81, S. 3]. Dementsprechend sollte auch der Blick zurück in die Geschichte gerichtet werden: Glücklicherweise

[24] „Puh – dieser Pühtagoras ist so schwierig."

müssen wir die Quadratwurzel einer Zahl nicht mehr händisch berechnen, ein Taschenrechner übernimmt diese Aufgabe, aber das Heron-Verfahren bietet eine Fülle an didaktischen Motiven und fundamentalen Ideen: Algorithmus, Approximation, Mittelwert, Konvergenz und Grenzwert. All das wird eingebettet in einen anschaulichen geometrischen Kontext: Eine Folge von Rechtecken nähert sich einem Quadrat an.

Mit Zirkel und Lineal oder Geodreieck, also völlig unabhängig von Software, erfahren Lernende die Bedeutung des genauen Arbeitens mit den eigenen Händen. Des Weiteren können sich hier Mathematik und Kunst begegnen und den Menschen ästhetisch-emotional ansprechen:

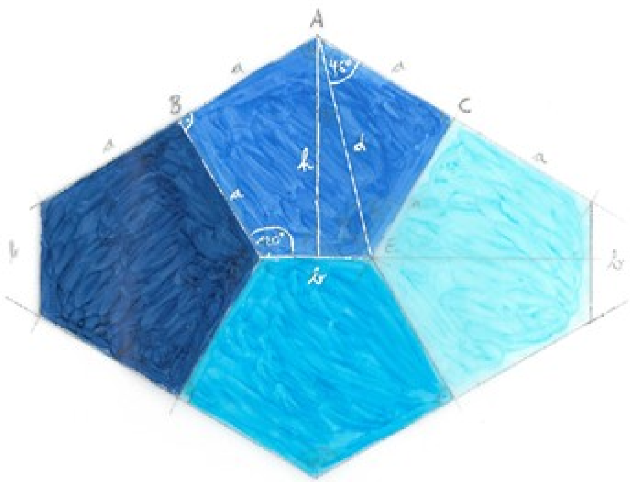


Abbildung 201: Händische Konstruktion und Berechnung der Kairo-Parkettierung (Ausschnitt)

Geometrie kann auf Papier, aber auch auf anderen Materialien betrieben und abgebildet werden. Mathematische Ideen und Formen gelangen so aus der geistigen Welt in die physische Welt. Der Computer stellt das Bindeglied dar. Mein Interesse an islamischer Geometrie führte mich dazu, Shirts handsiebbedrucken zu lassen. Um die übliche Medienkombination Computer und PowerPoint zu überwinden und dem Publikum etwas Besonderes zu bieten, habe ich zu einem Salon-Vortrag Models mit ebendiesen Shirts auftreten lassen:

Abbildung 202: Geometrie auf Textil (Aufnahme von Herrn Marc Miller)[25]

[25] Den Salon-Vortrag „Zauberhafte Geometrie – islamische Muster aus tausendundeiner Nacht" habe ich am 14. Oktober 2015 im Hotel Grauer Bär in Innsbruck gehalten. Frau DI Birgit Kopp hat die Shirts handsiebbedruckt. Auf dem Foto sehen Sie, wie Frau Tamara Wolf dem Publikum ein Shirt präsentiert.

Mit solchen Salon-Vorträgen möchte ich geistig offene Menschen in stilvoller Umgebung zusammenbringen und zeigen, wie schön Mathematik sein kann.

Zu einem anderen Salon-Vortrag[26] habe ich eine Ausstellung mit Konstruktionscomics vorbereitet. Solche Konstruktionscomics sind auch für Nicht-Experten leicht zugänglich: Man schaut einfach unabhängig von Formeln oder Text, wie eine Struktur Schritt für Schritt entsteht. Mit einer solchen Ausstellung können die Gäste in natürlicher Weise miteinander ins Gespräch kommen.

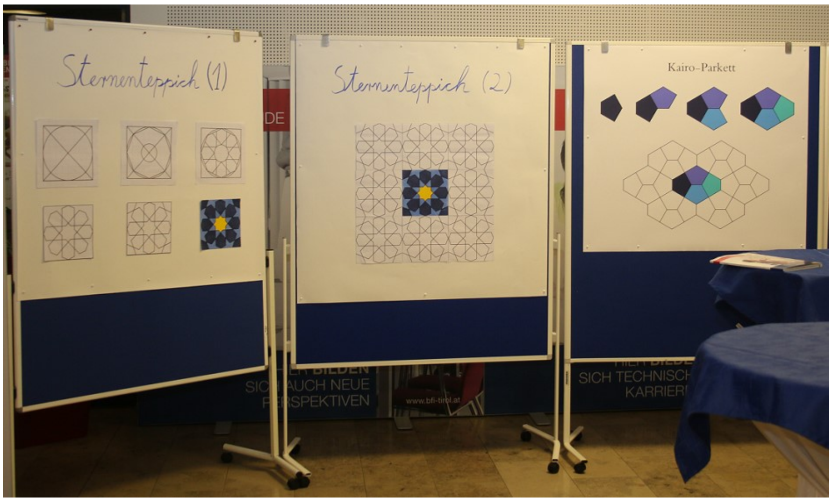


Abbildung 203: Konstruktions-Comics (Aufnahme von Frau Mag. Claudia Schatzlmair-Pratzer)

Mit dem Medium Computer stehen diverse Möglichkeiten zur Verfügung, sich anderweitig zu beschäftigen, um nicht zu sagen, abzulenken: durch E-Mails, Spiele, Musik, „soziale“ Netzwerke und so weiter. Im Zeitalter der Reizüberflutung gewinnt bewusstes Arbeiten in Ruhe und Muße an Bedeutung.

Hier ist eine gute Gelegenheit, zum Ende zu kommen mit einem Zitat aus meiner Kindheit. Es stammt von Peter Lustig und seiner Fernsehserie Löwenzahn:

„Abschalten!“

[26] Den Impuls-Vortrag „Zauberhafte Mathematik – wie man ein hartes Fach weich vermittelt“ habe ich am 26. Februar 2015 im Festsaal des BFI Tirol in Innsbruck gehalten. Herrn Cyril Pastor danke ich sehr für seine Unterstützung beim Aufbau.

7 Anhang

Hier sind der Reihe nach aufgeführt:

1. das Skript des Einführungskurses für DGS, den die Probanden während eines Tutoriums erhalten haben,

2. das Skript des Einführungskurses für RGS, den die Probanden während eines Tutoriums erhalten haben,

3. die Aufgaben der Interviews,

4. die charakteristischen Eigenschaften von Eigenmann-Aufgaben

5. das Abbildungsverzeichnis

6. das Tabellenverzeichnis

7. das Literaturverzeichnis und

8. das Stichwortverzeichnis.

Die Nummerierungen in den Einführungskursen beginnen wie bei den Handreichungen im Original bei eins.

7.1 Verwendete Einführung in DGS für die Interviews

Dynamische Geometrie mit dem Computer

Was beobachten Sie? (Warum ist das so?)

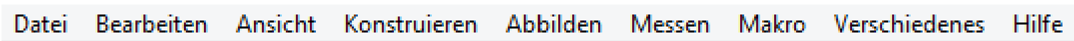
17. Nov. 2010, Michael Schneider nach einer Vorlage von [Hischer/Lambert07]

Dynamische Geometriesoftware DGS bildet die üblichen Werkzeuge Zirkel und Lineal (und weitere) virtuell ab und ermöglicht darüber hinaus das dynamische Experimentieren und Erkunden von Zusammenhängen.

Dieser Einführungskurs gibt Ihnen einen Eindruck davon, wie einfach erste Schritte in diese Richtung sind. Als Vertreter von DGS benutzen wir das Programm EUKLID DynaGeo.[27]

1. Einstieg in die Benutzeroberfläche von EUKLID DynaGeo

Starten Sie bitte das Programm EUKLID DynaGeo. Das Programmfenster besteht aus drei Zeilen. Die verschiedenen Möglichkeiten von DynaGeo können Sie entweder als aufgehende Scrollmenüs in der ersten Zeile



erhalten oder durch graphische Symbole („Icons“) in den Reitern der dritten Zeile. In dieser Einführung wird die letzte Variante benutzt.

Abbildung 1: Programmfenster von EUKLID DynaGeo (Ausschnitt)

Bitte klicken Sie auf den Reiter 

. In der Iconzeile sehen Sie nun die Werkzeugpalette *Konstruieren*.

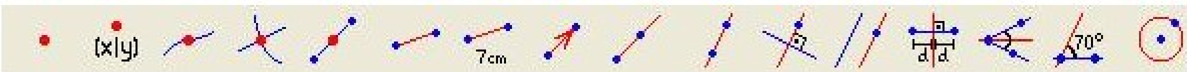
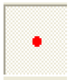
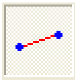


Abbildung 2: Werkzeugpalette Konstruieren (Ausschnitt)

Fahren Sie mit der Maus über ein Icon und warten Sie einen Augenblick, dann sehen Sie in einem kleinen Infofenster unterhalb des Mauszeigers, was Sie mit dem zugehörigen Werkzeug tun können. Die Auswahl des Werkzeugs erfolgt jeweils mit der linken Maustaste. Zum

[27] Genauer gesagt benutzen wir die Version 3.5e von EUKLID DynaGeo, http://www.dynageo.de.

Beispiel erstellen Sie mit dem ersten Icon  einen freien Punkt in Form eines kleinen schwarzen Quadrates ■ an einer gewünschten Position auf der Arbeitsfläche. Sobald dieser Punkt auf dem Bildschirm gesetzt ist, existiert er für das Programm als Objekt und Sie können damit weiter arbeiten. Mit dem Werkzeug  erzeugen Sie eine Strecke zwischen zwei bereits vorhandenen Punkten. Hierzu klicken Sie erst auf das Icon und danach auf die beiden Punkte. Falls die beiden Punkte noch nicht existieren, werden sie durch Klicken automatisch und komfortabel mit erzeugt.

Probieren Sie nun aus, erzeugen Sie Grundobjekte wie Punkte, Strecken, Dreiecke und Kreise.

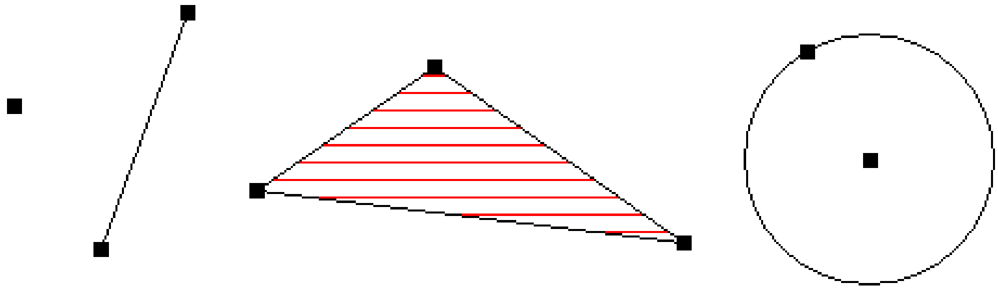


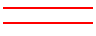
Abbildung 3: Geometrische Grundobjekte erstellt mit der Werkzeugpalette Konstruieren

Die Lage von erstellten freien Punkten ■ können Sie durch Ziehen mit der Maus verändern. Wenn Sie die Lage eines Punktes verändern, verändern Sie damit auch alle Objekte, die von diesem Punkt abhängen. Diesen Modus nennt man *Zugmodus*.

Verändern Sie in Ihrer Datei die Lage der Punkte und damit die Form und Größe der Geraden, der Dreiecke und der Kreise.

Wenn Sie ein Icon anklicken, erhalten Sie ganz unten im Programmfenster eine Aufforderung bzw. eine Befehlserklärung. Beachten Sie: Das Werkzeug können Sie nach Auswahl einmal benutzen, danach ist es wieder deaktiviert. Wenn Sie ein Werkzeug mehrfach hintereinander benutzen möchten, klicken Sie auf das entsprechende Icon mit gehaltener Strg-Taste. Dadurch aktivieren Sie den Dauerbetrieb. Diesen beenden Sie durch die Esc-Taste oder durch Auswahl eines anderen Werkzeugs.

Operationen können Sie rückgängig machen mit der Tastenkombination Strg und Z. Objekte löschen Sie mit dem Radiergummi  in dem Reiter der Hauptleiste.

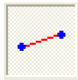
Weiter können Sie Objekte oder Markierungen  mit der rechten Maustaste verbergen. Das ist sinnvoll, wenn im Laufe einer Konstruktion sehr viele Objekte auf dem Bildschirm zu sehen sind, die das Erkennen des roten Fadens erschweren.

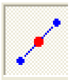
DynaGeo vergibt intern Bezeichnungen für die Objekte. Die Bezeichnungen sind nach Anklicken in einem Infofenster sichtbar. Üblicherweise benennt man die wichtigsten Objekte. Auf diese Weise kann man präzise darüber reden bzw. nachdenken.

2. Freie und abhängige Objekte

Im ersten Abschnitt haben wir die *freien* Punkte ▪ kennen gelernt, deren Lage im Zugmodus verändert werden kann. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass es auch *abhängige* Punkte gibt, deren Lage nicht direkt geändert werden kann.

Beispiel 1: Mittelpunkt einer Strecke

Zeichnen Sie eine Strecke $\overline{AB}$ mit dem Werkzeug *Strecke zwischen zwei Punkten* .

Wählen Sie nun in der Werkzeugpalette das Icon *Mittelpunkt*  aus. Der Mauszeiger verändert seine Form und wird zu einer Zielscheibe. Fahren Sie über die Strecke $\overline{AB}$. Sie wird blau gefärbt. Nach Anklicken sehen Sie den Mittelpunkt der Strecke. Sie können ihn M nennen.

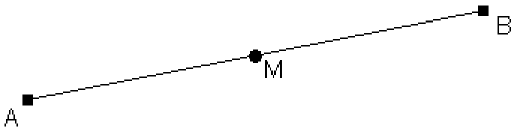


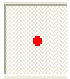
Abbildung 4: Eine Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt M

Sehen Sie sich den Punkt M genau an. Er ist dargestellt durch einen kleinen schwarzen Kreis. Was erwarten Sie: *Können Sie auch am Punkt M ziehen*?

Das ist deshalb *nicht* möglich, da M nach Konstruktion von A und B abhängt. Machen Sie die Strecke länger oder kürzer, in dem Sie an A oder B ziehen: M bleibt der Mittelpunkt der Strecke, richtig? Sie sehen an diesem einfachen Beispiel:

Funktionales Prinzip

Neue Objekte können von bereits existierenden Objekten abhängen. In diesem Fall lassen sich die abhängigen Objekte nicht mehr direkt verändern.

Würde man im Beispiel 1 den Mittelpunkt mit dem Werkzeug *Basispunkt*  als *freien* Punkt ▪ nach gut Augenmaß auf die Strecke $\overline{AB}$ setzen, würde sich beim Ziehen mit der Maus der gesetzte Punkt *nicht* automatisch mit verändern, da er nach Konstruktion *nicht* von den Ausgangspunkten abhängt.

Die Geschichte einer Konstruktion und die zugehörigen Objekte können Sie sich anzeigen lassen. Gehen Sie dazu auf den Reiter *Ansicht* im Kopfmenü und wählen Sie *Konstruktionstext zeigen...* aus:

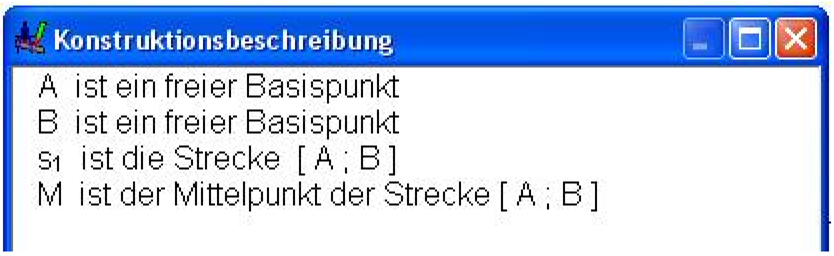


Abbildung 5: Konstruktionsbeschreibung von Beispiel 1

Der Konstruktionsbeschreibung kann man entnehmen, welche Punkte freie Basispunkte sind und welche Objekte abhängig sind.

Das Funktionale Prinzip hat auch für das Löschen von Objekten Konsequenzen: Mit einem Objekt werden alle davon abhängigen Objekte ebenfalls gelöscht. Wählen Sie den Radiergummi  aus und klicken Sie zum Beispiel auf den Punkt B.

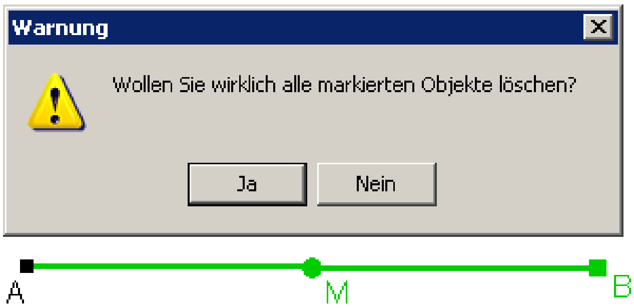
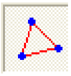
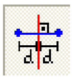
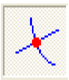


Abbildung 6: EUKLID DynaGeo markiert vor der Löschbestätigung betroffene Objekte farbig.

Wird der Punkt B gelöscht, so würden auch M und die Strecke $\overline{AB}$ gelöscht, da beide Objekte von B abhängen. Allein der Punkt A bliebe als freier Punkt ▪ übrig.

<u>Beispiel 2: Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten</u>

Erstellen Sie ein Dreieck  ABC. Konstruieren Sie auf jeder Dreiecksseite die *Mittelsenkrechte* . Was beobachten Sie? Ziehen Sie mit der Maus an den drei Ecken. Was ändert sich *nicht*?

Offenbar schneiden sich alle Mittelsenkrechten in genau einem Punkt M. Das sehen wir zwar (und trifft tatsächlich zu!), aber für den Computer existiert dieser Schnittpunkt noch nicht als Objekt. Daher konstruieren Sie bitte den Schnittpunkt M mit dem Werkzeug *Schnitt zweier Linien*  und wählen Sie hierfür zwei der drei Mittelsenkrechten aus. Danach sehen Sie den Schnittpunkt als regulären Punkt mit dem Symbol ● .

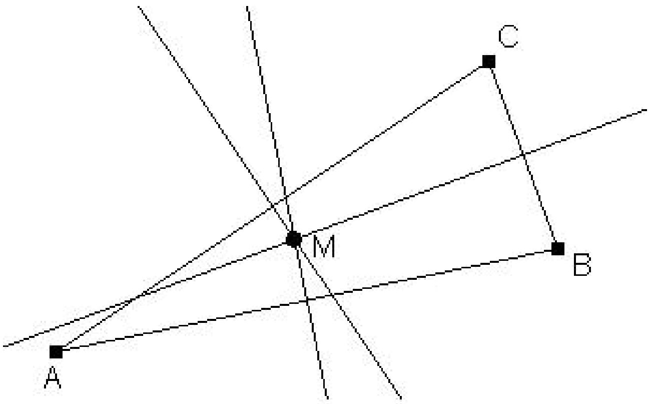


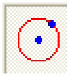
Abbildung 7: Dreieck ABC mit Schnittpunkt *M* der drei Mittelsenkrechten

Welche besondere Eigenschaft besitzt der Schnittpunkt M der drei Mittelsenkrechten?

Auf der Mittelsenkrechten einer Strecke liegen alle Punkte, die von zwei gegebenen Punkten den gleichen Abstand besitzen. M ist der Schnittpunkt zweier Mittelsenkrechten, besitzt also von den Eckpunkten A, B und C den gleichen Abstand. Daraus ergibt sich, dass der Kreis um M durch A (bzw. B oder C) auch durch die beiden anderen Punkte verläuft. Weiter kann es nur einen solchen Kreis geben. Wir nennen ihn den Umkreis des Dreiecks.

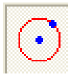
Satz

Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in genau einem Punkt. Dieser Punkt ist der Mittelpunkt des Umkreises.

Überprüfen Sie diese Aussage mit der Software. Konstruieren Sie einen Kreis  mit Mittelpunkt M durch A (oder B oder C). Verändern Sie die Form des Dreiecks, in dem Sie mit der Maus an den Eckpunkten ziehen. Die Konfiguration verändert sich dynamisch mit. Der Kreis ist immer der Umkreis des Dreiecks ABC, denn er wurde im Hinblick darauf gezielt konstruiert und nicht nach gut Augenmaß gesetzt. Das Funktionale Prinzip zieht sich durch alle Schritte einer Konstruktion.

Um die Anordnung etwas übersichtlicher zu gestalten, können Sie die Mittelsenkrechten durch Anklicken mit der rechten Maustaste verbergen.

<u>Beispiel 3: Eine Konfiguration bestehend aus einem Dreieck und einem Kreis</u>

Setzen Sie das Beispiel 1 fort und konstruieren Sie einen Kreis mit Mittelpunkt M durch A (oder B) durch das Werkzeug *Kreis um Mittelpunkt durch Kreispunkt* . Nach Anklicken des Icons sehen Sie unten im Programmfenster die Aufforderung bzw. die Erklärung: „Mittelpunkt und Kreispunkt angeben.“ Tun Sie das sinngemäß mit dem Punkt M und dem Punkt A.

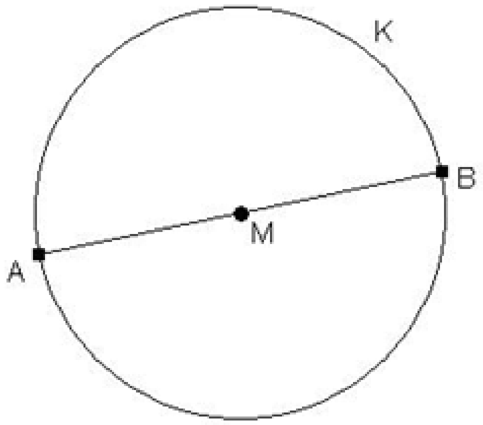
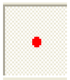
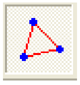


Abbildung 8: Strecke $\overline{AB}$ und Kreis K mit Mittelpunkt M durch A und B

Ziehen Sie am Punkt A oder am Punkt B: Der Punkt M bleibt der Mittelpunkt der Strecke und K bleibt der Kreis mit Mittelpunkt K durch die Punkte A und B. Ergänzen Sie die Anordnung durch einen weiteren *Basispunkt*  C oberhalb des Kreises K und konstruieren Sie das Dreieck  ABC.

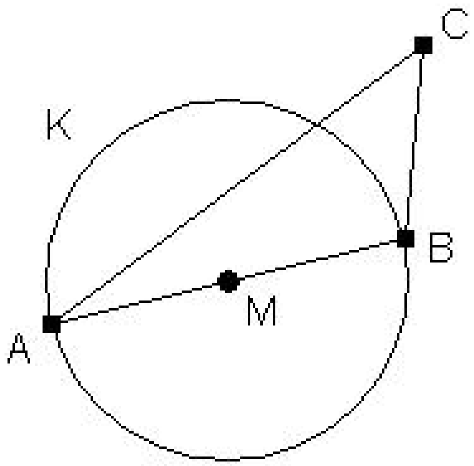


Abbildung 9: Punkt C und Dreieck ABC als weitere Objekte

Welchen Wert hat der Innenwinkel Ihres Dreiecks bei C? Ist er größer oder kleiner als 90°?

Ihre Vermutung können Sie mit Hilfe der Software überprüfen. Bitte klicken Sie dazu auf den Reiter Messen & Rechnen. Wählen Sie das Werkzeug *Winkel messen* 

. Messen Sie damit den Innenwinkel des Dreiecks bei C, indem Sie nacheinander die Punkte A, C und B anklicken. Wie gut haben Sie geschätzt?

Wie ändert sich der Winkel, wenn Sie C zum Punkt M hin bewegen, wie ändert er sich, wenn Sie ihn von M weg bewegen?

Prüfen Sie Ihre Vermutung, in dem Sie an C ziehen und so die Lage von C variieren.

Für welche Positionen von C beträgt der Winkel genau 90°? Finden Sie mehrere Positionen von C mit dieser Eigenschaft.

Eine allgemeine Antwort auf die letzte Frage gibt der

Satz des Thales

Liegt der Punkt C eines Dreiecks ABC auf dem Halbkreis über der Strecke $\overline{AB}$, dann hat das Dreieck bei C immer einen rechten Winkel.

Es gilt auch die *Umkehrung* des Satzes: Hat ein Dreieck bei C einen rechten Winkel, dann liegt C auf dem Halbkreis mit Mittelpunkt M durch A bzw. B.

Mit der Software können Sie den Satz des Thales für beliebig viele Einzelfälle in den Grenzen der Rechengenauigkeit überprüfen. Eine Begründung oder gar einen Beweis liefert die Software nicht.

Einladung zur Selbstkontrolle

- Wie finden Sie die Bedeutung eines Werkzeugs heraus?
- Wie machen Sie einen Arbeitsschritt rückgängig?
- Wie ändern Sie die Bezeichnung eines Objektes?
- Erklären Sie den Unterschied zwischen freien Punkten und abhängigen Punkten.
- Angenommen, es schneiden sich zwei Objekte. Warum ist es nötig, den Schnittpunkt explizit zu konstruieren, wenn man damit weiter arbeiten will?
- Wie können Sie feststellen, ob ein Objekt von anderen abhängt oder nicht? Nennen Sie mehrere Möglichkeiten.
- Was sollten Sie beim Löschen von Objekten beachten?
- Formulieren Sie das Funktionale Prinzip.

Übungsaufgaben zu EUKLID DynaGeo

Aufgabe 1

Lesen Sie bitte die folgende Konstruktionsbeschreibung.

A und B sind freie Punkte.
M ist Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.
K ist der Kreis mit Mittelpunkt B durch den Punkt M.

a) Führen Sie diese Konstruktion mit DynaGeo durch.

b) Welche Objekte sind abhängige Objekte? Wovon hängen diese ab?

c) Wie können Sie den Kreis K kleiner (bzw. größer) machen? Nennen Sie zwei Möglichkeiten.

d) Welche Objekte werden gelöscht, wenn Sie den Punkt B löschen?

Aufgabe 2

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC, die Mittelsenkrechten des Dreiecks und deren Schnittpunkt U. Auf welcher Spur bewegt sich der Punkt U, wenn Sie am Eckpunkt B ziehen?

Aufgabe 3

Erstellen Sie mit DynaGeo ein gleichseitiges Dreieck. Es soll möglich sein, an einem Eckpunkt zu ziehen, um das Dreieck so größer bzw. kleiner zu machen, aber es soll gleichseitig bleiben. Welche Werkzeuge benutzen Sie?

Aufgabe 4

Wir gehen aus von einem Kreis K mit Mittelpunkt M durch den Punkt P. Erstellen Sie den Kreis um P durch M, bestimmen Sie die Schnittpunkte der Kreise und zirkeln Sie den Kreisradius von diesen Schnittpunkten ausgehend wieder und wieder ab. Wie oft ist das möglich?

Aufgabe 5

Gegeben seien drei verschiedene Punkte A, B und C.
Existiert ein Kreis, dessen Kreislinie durch diese drei Punkte verläuft?
Wie können Sie den Kreis im Falle der Existenz exakt konstruieren?
Wann existiert ein solcher Kreis und wann nicht?

7.2 Verwendete Einführung in RGS für die Interviews

Relationale Geometrie mit dem Computer

Was beobachten Sie? (Warum ist das so?)

20. Nov. 2010, Michael Schneider nach einer Vorlage von [Hischer/Lambert07]

Geometriesoftware bildet die üblichen Werkzeuge Zirkel und Lineal (und weitere) virtuell ab und ermöglicht das dynamische Experimenten und Erkunden von Zusammenhängen. Die folgen-den Ausführungen vermitteln exemplarisch einen Eindruck davon, wie einfach erste Schritte in diese Richtung sind. Wir benutzen hierfür als Software das Programm *Geometry Expressions.*[28] Geometry Expressions bietet neben der virtuellen Realisierung von Zirkel und Lineal, die Möglichkeit, zwischen geometrischen Objekten Relationen festzulegen.

1. Einstieg in die Benutzeroberfläche von Geometry Expressions

Starten Sie bitte das Programm Geometry Expressions. Rechts sehen Sie verschiedene Werkzeugpaletten (Draw, Constraint (Input), Construct usw.).

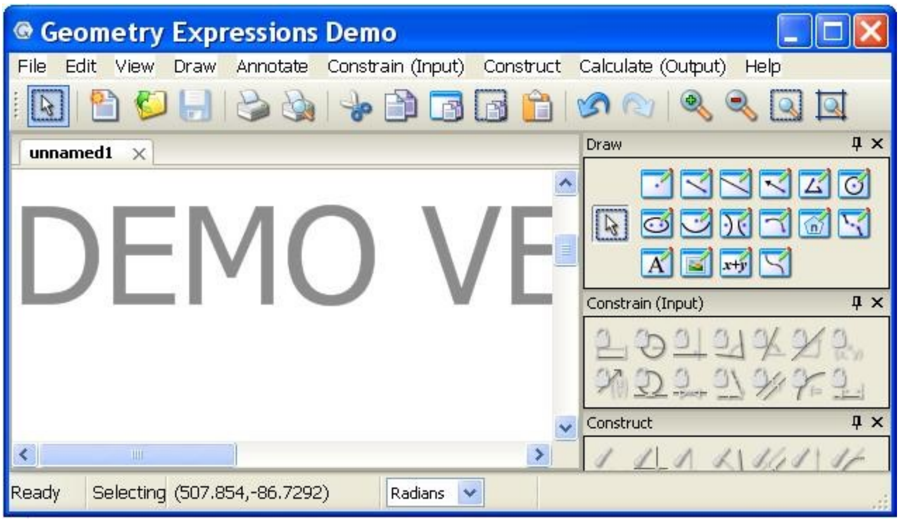


Abbildung 1: Programmfenster von Geometry Expressions (Demo Version)

In der Werkzeugpalette „Draw“ auf der rechten Seite finden Sie Icons für geometrische Objekte, die Sie mit der Maus auf dem Bildschirm zeichnen können.

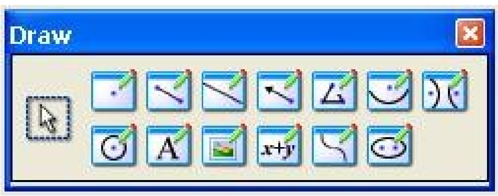


Abbildung 2: Werkzeugpalette Draw

[28] Genauer gesagt handelt es sich um die Demo-Version 2.2 von Geometry Expressions, www.geometryexpressions.com, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016.

Fahren Sie mit der Maus über ein Icon und warten Sie einen Augenblick, dann sehen Sie, was Sie mit dem zugehörigen Werkzeug tun können. Probieren Sie einfach aus, zeichnen Sie Grundobjekte wie Strecken und Kreise. Dreiecke erstellt man mit dem Icon  für Polygone, wobei man am Ende wieder den Anfangspunkt anklickt.

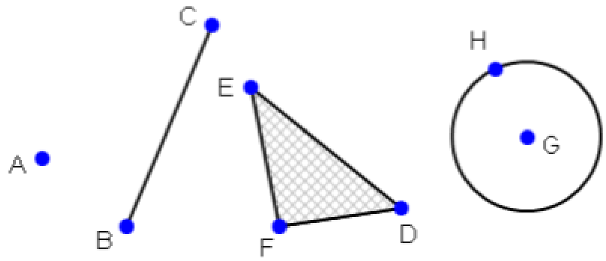


Abbildung 3: Geometrische Grundobjekte erstellt mit der Werkzeugpalette Draw

Sie können nach dem Erstellen diese Objekte durch Ziehen mit der Maus verändern, wenn Sie das Pfeil-Werkzeug  in der Werkzeugpalette *Draw* ausgewählt haben. Probieren Sie es bitte aus, zum Beispiel mit einem Kreis und einer Strecke. Verändern Sie die Lage und die Größe bzw. die Länge.

Außerdem können Sie in der Menüleiste auf dem Reiter die letzte Aktion rückgängig machen. Die Tastenkombination hierfür ist Strg und Z. Um eine Bezeichnung zu ändern, klicken Sie auf den Buchstaben des zugehörigen Objekts.

2. Erstellen von neuen Objekten aus bereits vorhandenen

In der Einleitung haben wir gerade gesehen, wie wir mit der Werkzeugpalette *Draw* geometrische Grundobjekte erstellen. Gleich behandeln wir, wie wir aus bereits vorhandenen Objekten neue Objekte erzeugen.

<u>Beispiel 1: Mittelpunkt einer Strecke</u>

Zeichnen Sie eine Strecke $\overline{AB}$. Nun klicken Sie auf die Strecke, sie färbt sich gelb. In der Werkzeugpalette Construct sind nun einzelne Icons rot hervorgehoben:

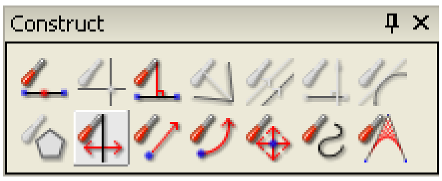


Abbildung 4: Werkzeugpalette Construct

Die rot hervor gehobenen Icons stehen für diejenigen Konstruktionen, die mit den ausgewählten Objekten (hier die Strecke $\overline{AB}$) möglich sind. Probieren Sie bitte das erste Icon  aus, es liefert den Mittelpunkt einer Strecke. Das Ergebnis ist in Abbildung 5 dargestellt.

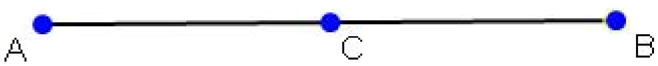


Abbildung 5: Eine Strecke $\overline{AB}$ mit Mittelpunkt C

Funktioniert das bei Ihrer Strecke $\overline{AB}$, liegt C in der Mitte? Ziehen Sie an A oder an B. Der Punkt C bleibt der der Mittelpunkt der Strecke, richtig?

Was erwarten Sie: *Können Sie auch am Punkt C ziehen?*

Das Beispiel verdeutlicht das

Hauptprinzip der relationalen Geometriesoftware (RGS)

Das System realisiert die Bedingungen, die man übermittelt, aber abgesehen davon kann der Benutzer die Konfiguration im Zugmodus frei verändern.

Offensichtlich kann man auf verschiedenen Wegen zur Konfiguration von Abbildung 5 gelangen. Entscheidend ist, dass die gleichen Objekte erzeugt werden und die gleichen Relationen bzw. Einschränkungen gelten:

Definition

Zwei Konfigurationen heißen logisch äquivalent, wenn sie die gleichen Objekte und logisch äquivalente Relationen beinhalten.

Es ist möglich, Punkte zu fixieren, in dem man feste Koordinaten vorgibt. Probieren Sie es bitte für den Punkt A aus: A soll die Koordinaten $(0|0)$ erhalten. Um diese Einschränkung wieder zu löschen, klicken Sie auf die Koordinaten des Punktes und drücken die Delete-Taste auf Ihrer Tastatur.

<u>Beispiel 2: Winkelhalbierende zweier Strecken</u>

Schauen wir uns ein weiteres Beispiel an. Zeichnen Sie zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ mit gleichem Anfangspunkt. Markieren Sie beide mit gehaltener Shift-Taste durch linken Mausklick. Nun sind beide Strecken gelb markiert.

In der Werkzeugpalette *Construct* sehen Sie nun rot gefärbt das Icon für die Winkelhalbierende. Klicken Sie es an. Jetzt haben Sie die Winkelhalbierende von $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ erstellt. Erkunden Sie wieder den Freiheitsgrad der Konfiguration: Ziehen Sie an den Punkten A, B und C und an den Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$.

Was erwarten Sie: *Können Sie auch an der Winkelhalbierenden ziehen?*

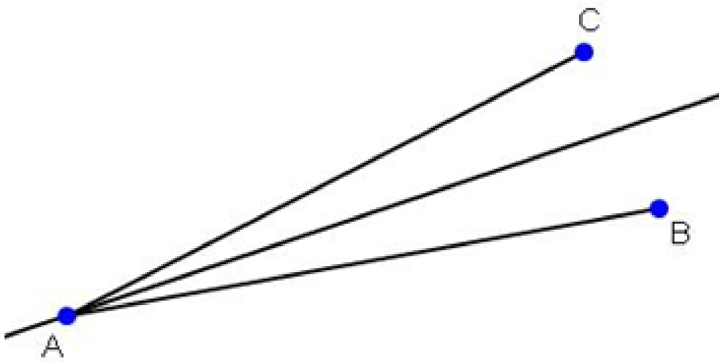


Abbildung 6: Zwei Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ und Winkelhalbierende

2. Beziehungen zwischen geometrischen Objekten: Relationen und Einschränkungen

Das Besondere an Geometry Expressions ist, dass man Objekten Eigenschaften (Einschränkungen) vorschreiben kann und zwischen Objekten Beziehungen (Relationen) setzen kann. So lautet im Beispiel 1 die Beziehung zwischen dem Punkt C und der Strecke $\overline{AB}$: C ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Wenn dem Punkt A Koordinaten zugewiesen werden, so ist das eine Einschränkung für die Konfiguration.

Die Punkte A und B sind zwar in gewisser Weise in der Entstehung von C involviert, aber die Punkte sind alle gleichberechtigt, das heißt: Es kann an jedem Punkt gezogen werden und die Konfiguration behält ihre Eigenschaften.

Beispiel 3: Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen

Wir wollen ein Dreieck mit vorgegebenen Seitenlängen erstellen, zum Beispiel 3, 4 und 5 LE. Zeichnen Sie dazu erst ein beliebiges Dreieck mit dem Polygon-Werkzeug  aus der Palette *Draw*. Klicken Sie dann eine Dreiecksseite an, diese färbt sich gelb. Wählen Sie in der Palette *Constraint* das erste Icon  für die Einschränkung einer Streckenlänge bzw. eines Abstandes. Es erscheint ein kleines Eingabefenster über der gewählten Dreiecksseite. Wählen Sie als erste Länge 3 LE.

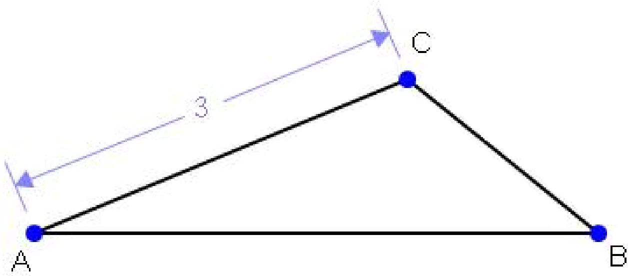


Abbildung 7: Dreieck ABC, Länge der Seite $\overline{\text{AC}}$ ist 3 LE.

Was erwarten Sie, wenn Sie an den Punkten A, B und C und den Seiten des Dreiecks ziehen? Was beobachten Sie, wenn Sie das tun? Bestätigt sich Ihre Erwartung? Sie können durch das Ziehen alles verändern, aber nicht die vorgegebene Seitenlänge $\overline{AC}$. Dafür müssten Sie $\overline{AC}$ anklicken, wieder  auswählen und so die Seitenlänge neu eingeben. Nun verfahren Sie ebenso mit der Strecke $\overline{BC}$ und ordnen ihr die Länge 4 zu. Probieren Sie danach wieder aus, was passiert, wenn Sie an den Punkten und den Seiten ziehen. Schließlich können Sie der letzten Seite die Länge 5 zuweisen. Was beobachten Sie, warum ist das so?

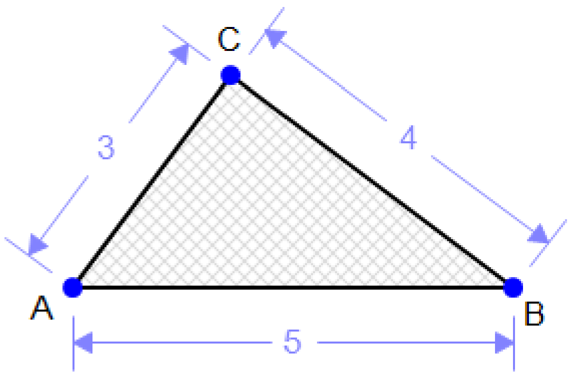


Abbildung 8: Dreieck ABC mit Seitenlängen 3, 4 und 5 LE

Die zugehörige allgemeine Aussage liefert der

Kongruenzsatz SSS

Ein Dreieck ist durch die Angabe der drei Seitenlängen bereits eindeutig festgelegt.

Mit Geometry Expressions kann ein derart festgelegtes Dreieck nur noch verschoben (oder ggf. gedreht) werden.

<u>Beispiel 4: Inkreis eines Dreiecks</u>

Zeichnen Sie ein Dreieck  und einen Kreis . Klicken Sie auf den Kreis und dann mit gehaltener Shift-Taste auf eine Dreiecksseite. Beide werden gelb gefärbt. Wählen Sie aus der Palette *Constraint* das Werkzeug *Tangent*  . Der Kreis liegt nun tangential auf einer Dreiecksseite, richtig?

Erkunden Sie den Freiheitsgrad der Konfiguration, verschieben Sie den Kreis in das Innere des Dreiecks und wieder nach außen. Sie können natürlich auch das Dreieck verändern.

Klicken Sie auf den Kreis und mit gehaltener Shift-Taste auf eine zweite Dreiecksseite. Wählen Sie wieder die Bedingung *Tangent*  . Nun liegt der Kreis tangential zu zwei Seiten des Dreiecks. Wiederholen Sie diese Aktion mit der letzten Dreiecksseite. *So kann mit der Software der Inkreis eines gegebenen Dreiecks erstellt werden*:

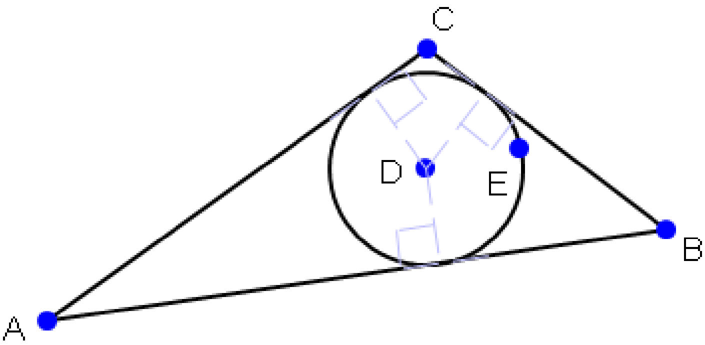


Abbildung 9: Kreis um D durch E ist Inkreis des Dreiecks ABC.

3. Einladung zur Selbstkontrolle

- Mit welcher Werkzeugpalette lassen sich geometrische Grundobjekte erstellen?
- Mit welcher Werkzeugpalette können aus gegebenen Objekten neue Objekte erzeugt werden?
- Wie machen Sie einen Arbeitsschritt rückgängig?
- Wie ändern Sie die Bezeichnung eines Objektes?
- Welche Möglichkeiten gibt es, einen Punkt zu fixieren?

- Formulieren Sie das Hauptprinzip der Relationalen Geometriesoftware.
- Wann bezeichnet man Konfigurationen als logisch gleichwertig?
- Formulieren Sie das Funktionale Prinzip.

Übungsaufgaben zu Geometry Expressions

Aufgabe 1

Gibt es ein Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4 und 8 Längeneinheiten?

Aufgabe 2

Betrachten Sie die beiden Konfigurationen:

1. A, B sind Punkte. C ist der Mittelpunkt von A und B.
2. A, B und C sind Punkte. Der Abstand von A zu C wird mittels *Distance/Length* auf den Parameter a festgesetzt, ebenso werde der Abstand von C zu B auf a festgesetzt.

   a) Sind diese Konfigurationen logisch äquivalent?

   b) Worin besteht ein grundsätzlicher Unterschied zwischen den Konfigurationen?

   c) Setzen Sie beide Konfigurationen um und vergleichen Sie das Zugverhalten.

Aufgabe 3

Erzeugen Sie ein Dreieck ABC und einen Kreis. Übermitteln Sie dem System Bedingungen, damit der Kreis zum Umkreis des Dreiecks wird. Wie viel Bedingungen benötigen Sie dafür?

Aufgabe 4

Erstellen Sie mit Geometry Expressions ein gleichseitiges Dreieck. Es soll möglich sein, an einem Eckpunkt zu ziehen, um das Dreieck so größer bzw. kleiner zu machen, aber es soll gleichseitig bleiben. Welche Werkzeuge benutzen Sie?

Aufgabe 5

In einer Konfiguration liegen vor ein Kreis K um den Punkt M und ein Punkt P außerhalb von K. Übertragen Sie diese Konfiguration in Geometry Expressions.

a) Erzeugen Sie eine Tangente vom Punkt P an den Kreis. Erkunden Sie die entstehende Situation.

b) Können Sie die Tangente auch mit EUKLID DynaGeo (oder mit Zirkel und Lineal) erstellen, wenn der Kreis K und der Punkt P gegeben sind?

7.3 Interview-Aufgaben

Aufgabe „Quadrat“

a) Ist ein Viereck mit vier gleich langen Seiten zwangsläufig ein Quadrat?

b) Erstellen Sie mit einem Programm Ihrer Wahl ein Quadrat. Es soll möglich sein, an einem Eckpunkt zu ziehen und das Quadrat so größer bzw. kleiner zu machen.

c) Wann genau ist ein Viereck ein Quadrat? Bitte geben Sie eine kurze, präzise Formulierung:

Ein Viereck ist ein Quadrat genau dann, wenn ____
____

Aufgabe „Umkreismittelpunkt eines Dreiecks“

Wann liegt der Umkreismittelpunkt eines Dreiecks innerhalb des Dreiecks, wann außerhalb?

Aufgabe „Abrutschende Leiter“

An einer Wand stehe eine Leiter mit fester Länge, zum Beispiel 5 Längeneinheiten. Die Leiter rutscht ab. Auf welcher Kurve bewegt sich dabei der Mittelpunkt der Leiter? Können Sie Ihre Antwort begründen?

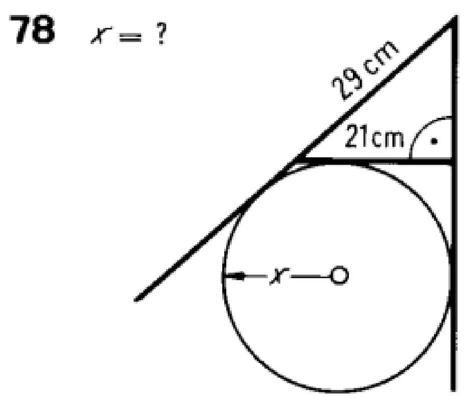
Aufgabe „Ortslinie“

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$. Wo liegen alle Punkte, die von B doppelt so weit entfernt sind wie von A? Beschreiben Sie die Kurve, die durch die Punkte mit dieser Eigenschaft definiert wird.

Aufgabe „Gemeinsame Tangenten zweier Kreise“

Wie viele *gemeinsame* Tangenten können zwei Kreise besitzen?

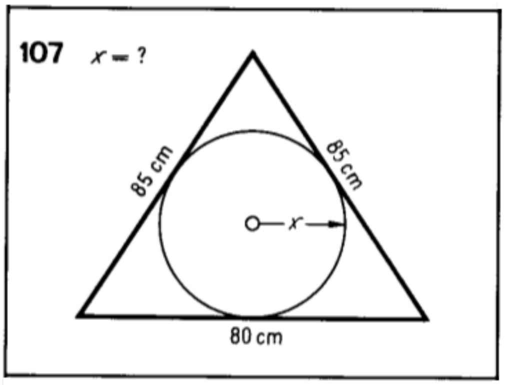
Aufgabe „Eigenmann Nr. 78“



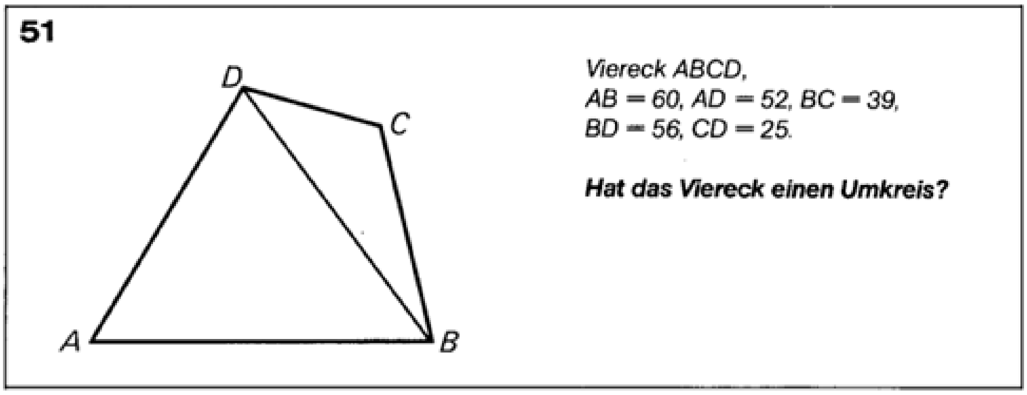
Aufgabe „Umkreis Vierecke“

Welche Vierecke besitzen einen Umkreis?

Aufgabe „Eigenmann Nr. 107“

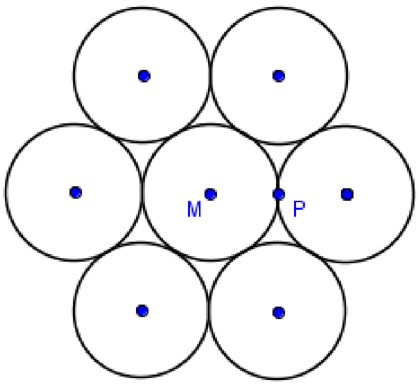


Aufgabe „Eigenmann Nr. 51 des zweiten Teils“



Aufgabe „Blumenmuster“

Gegeben sei ein Kreis K mit Mittelpunkt M durch den Punkt P. Erzeugen Sie sechs gleich große Kreise um den Kreis K, die K berühren, so dass folgendes Blumenmuster entsteht.



Wenn Sie benachbarte Mittelpunkte der sechs äußeren Kreise miteinander verbinden erhalten Sie ein Sechseck. Welche Eigenschaften besitzt dieses Sechseck?

7.4 Charakteristische Eigenschaften von Eigenmann-Aufgaben

Diese Aufgaben gehen auf P. EIGENMANN und sein Buch [Eigenmann81] zurück. Im Tagungsband des AK Geometrie 2009 [Schneider09, S. 143-154] formuliere ich die für diese Aufgaben charakteristischen Eigenschaften und die Philosophie dieser Aufgaben:

1. *Die Aufgabe ist minimalistisch gestellt: Es gibt eine Zeichnung und eine Frage dazu. Die Zeichnung muss als geometrische Figur interpretiert werden.*
2. *Die Frage ist kurz und direkt formuliert, es existiert eine eindeutige Antwort.*
3. *Es gibt keine Abfolge von Arbeitsanweisungen.*
4. *Hinweise werden nur sparsam und allgemein gegeben.*
5. *Es ist eine Problemlöseaufgabe.*

Als Philosophie lässt sich ergänzen, dass beim Lösen einer Eigenmann-Aufgabe ein ökonomisches Prinzip beachtet werden soll: Es kommen keine ausgefallenen, komplizierten Formeln zum Einsatz.

7.5 Abbildungsverzeichnis[29]

[29] Zur besseren Lesbarkeit sind einige Beschriftungen hier gekürzt.

7.6 Tabellenverzeichnis

7.7 Literaturverzeichnis

A

[Arens/Hettlich12]
Arens, T., Hettlich F., Karpfinger Ch., Kockelkorn U., Lichtenegger K., Stachel H., *Mathematik*, Spektrum Akademischer Verlag, 2. Auflage 2012, ergänzt durch Online-Bonusmaterial auf http://static.springer.com/sgw/documents/565599/application/pdf/978-3-8274-1758-9_Bonus_Kap_02.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

B

[Bender/Schreiber85]
Bender, P., Schreiber, A., *Operative Genese der Geometrie*, Hölder-Pichler-Tempsky Wien und Teubner Stuttgart; Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 12, 1985

[Bourgoin73][30]
Bourgoin, J., *Arabic geometrical pattern and design*, Dover Publications Inc., New York, 1973.

[Broug08]
Broug, E., *Islamic geometric patterns*, Thames & Hudson, 2008

[BoFuHo95]
Bouma W., Fudosy I., Hoffmann Chr., Caiz J., Paigez R., *A Geometric Constraint Solver*, CAD (27), S. 487-501, 1995

[Bruner70]
Bruner, J., *Der Prozess der Erziehung*, Berlin-Verlag, 1970

C

[Critchlow76]
Critchlow, K., *Islamic Patterns. An analytical and cosmological approach*, Thames & Hudson, 1976

D

[Danner79]
Danner, H. *Methoden geisteswissenschaftlicherPädagogik*, Reinhardt-Verlag, 1979

[Dreyfus/Hoch09]
Dreyfus, T., Hoch, M., *Developing Katy's algebraic structure sense*, Proceedings of Cerme 6, www.researchgate.net/publication/267789208_developing_katy's_algebraic_structure_sense, 2009, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

[30] Das Buch gibt die Muster des französischen Originals *Les Eléments de l'art arabe* von 1879 ohne Text wider.

E

[Eco10]
Eco, U. *Wie man eine wissenschaftliche Abschlussarbeit schreibt*, 13. Auflage, Facultas Wien, 2010

[Eigenmann81]
Eigenmann, P. *Geometrische Denkaufgaben*, Ernst Klett Stuttgart, 1981

[ElGaHe00]
Elschenbroich, H.-J., Gawlick, Th., Henn, H.-W. (Hrsg.), *Zeichnung – Figur – Zugfigur*, Ergebnisse eines RiP-Workshops vom 12. bis 16. Dezember 2000 im mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach, Franzbecker, 2001

F

[Filler11]
Filler, A., *Problemorientierte geometrische Aufgaben – mit oder ohne Computer?,* S. 19-34 im Tagungsband AK Geometrie 2010 in „Werkzeuge im Geometrieunterricht", herausgegeben von Ludwig M., Filler, A. und Oldenburg, R., Franzbecker, 2011

[Franke07]
Franke, M., *Didaktik der Geometrie in der Grundschule*, Spektrum Akademischer Verlag, 2007

[Freudenthal73]
Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 2, Klett Studienbücher, 1973

[Führer85]
Führer, L., *Funktionales Denken: Bewegtes fassen - das Gefaßte bewegen,* S. 12-13 Mathematik Lehren 11, 1985

G

[Graumann et al. 96]
Graumann, G.; Hölzl, R.; Krainer, K.; Neubrand, M.; Struve, H., *Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre*, Journal für Mathematik-Didaktik 17, Nr. 3-4, S. 163-237, 1996

[Grams16]
T. Gramms, *Internetpräsenz*: http://www2.hs-fulda.de/~grams/index.htm, zuletzt abgerufen am 18. April 2016

H

[Hattermann11]
Hattermann, M., *Der Zugmodus in 3D-dynamischen Geometriesystemen (DGS): Analyse von Nutzerverhalten und Typenbildung*, Vieweg+Teubner, 2011

[Heinze/Thiemann82]
Heinze, T., Thiemann, E., *Kommunikative Validierung und das Problem der Geltungsbegründung*, Zeitschrift für Pädagogik (28), S. 635-642, 1982

[Hischer/Lambert07]
Hischer, H., Lambert, A., *Bewegliche Geometrie mit dem Computer - Was beobachtest Du? (Warum ist das so?)*, 2007, www.math.uni-sb.de/ag/lambert/CrashkursEuklidDynageo.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

[Hoffmann/Joan-Arinyo05]
Hoffmann Chr., Joan-Arinyo, R., *A Brief on Constraint Solving*, http://www.cs.upc.edu/~robert/ThailandFull.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

[Hölzl94]
Hölzl, R. *Die konstruierten Punkte noch binden! - Schülervorstellungen von der Cabri-Geometrie,* Anschauliche und Experimentelle Mathematik II, hpt-Verlag, Wien 1994

K

[Kadunz/Sträßer09]
Kadunz, G., Sträßer, R., *Didaktik der Geometrie in der Sekundarstufe I*, Franzbecker 2009

[Kebeck94]
Kebeck, G., *Wahrnehmung: Theorien, Methoden und Forschungsergebnisse der Wahrnehmungspsychologie,* Juventa-Verlag, 1994

[Klüver79]
Klüver, J. *Kommunikative Validierung*, in: Heinze, T. (Hrsg.): Theoretische und methodologische Überlegungen zum Typus hermeneutisch-lebensgeschichtlicher Forschung, Werkstattbericht, Hagen, Fernuniversität Hagen, S. 69-84, 1979

[Kortenkamp99]
Kortenkamp, U., *Foundations of Dynamic Geometry*, Dissertation, ETH Zürich, 1999

[Krüger99]
Krüger, K., *Erziehung zum funktionalen Denken*, Dissertation, Logos Verlag, 1999

L

[Linchevski/Livneh99]
Linchevski, L., Livneh, D., *Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts*, Educational Studies in Mathematics, 40(2), S. 173-196, 1999

M

[Mayring10]
Mayring, Ph., *Qualitative Inhaltsanalyse Grundlagen und Techniken*, Beltz 2010

[Mechling12]
Mechling, R. *EUKLID DynaGeo (Dynamische Geometriesoftware)*, Version 3.7, Hilfe zur Software, 2012

O

[Oldenburg05]
Oldenburg, R., *Bidirektionale Verknüpfung von Computeralgebra und dynamischer Geometrie*, Journal für Mathematikdidaktik 26, S. 249-273, 2005

[Oldenburg06]
Oldenburg, R., *FeliX – a prototypical system that links computer algebra and dynamic geometry*, Tagungsband DES, 2006

[Oldenburg08]
Oldenburg, R., *FeliX – mit Algebra Geometrie machen*, Computeralgebra-Rundbrief, Sonderheft April 2008, S. 15-17

P

[Parzysz88]
Parzysz, B. *Knowing vs. Seeing. Problems of the plane representation of space geometry figures*, Educational Studies in Mathematics, 19(1), S. 79-92, 1988

R

[Roth05]
Roth, J., *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*, Dissertation, Franzbecker, 2005

S

[Schneider09]
Schneider, M., *Problemlösen im Kontext der Basiskompetenzen*, Tagungsband AK Geometrie 2009 in Königswinter „Basiskompetenzen in der Geometrie", herausgegeben von Ludwig, M. und Oldenburg, R., Franzbecker, 2009

[Schreiber10]
Schreiber, Chr., *Semiotische Prozess-Karten, Chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen*, Waxmann, 2010

[Steinwandel/Ludwig11]
Steinwandel, J., Ludwig, *Die Suche nach der angemessenen Darbietung räumlicher Strukturen - Analyse von Präsentationsformen und Beschreibungsmodell der Komplexität*, S. 173-184 im Tagungsband AK Geometrie 2010 in „Werkzeuge im Geometrieunterricht", herausgegeben von Ludwig M., Filler, A. und Oldenburg, R., Franzbecker, 2011

[Schumann07]
Schumann, H. *Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum*, Franzbecker-Verlag 2007

[Schupp02]
Schupp, H. *Thema mit Variationen*, Franzbecker, 2002

[Sutton07]
Sutton, A., *Islamic Design, A Genius for Geometry*, Walker & Company, New York 2007

T

[Talmon/Yerushalmy04]
Talmon, V., Yerushalmy, M., *Understanding dynamic behaviour: parent-child relations in dynamic geometry environments*, Educational Studies in Mathematics 57 (2004), Seite 91-119, 2004

[TieFöKli00]
Tietze, U.-P., Förster, Klika, M., *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*, Band 1, 2. Auflage, Springer Fachmedien Wiesbaden, 2000

[Todd13]
Todd, Ph., *Geometry Expressions Manual*, 2013, http://geometryexpressions.com/downloads/Geometry%20Expressions%20Manual.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

V

[Vollrath89]
Vollrath, H.-J., *Funktionales Denken*, Journal für Mathematikdidaktik 10 (1989), S. 3 – 37, www.history.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/vollrath/papers/052.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

W

[Willimann07]
Willimann, B., *Parkettierungen – einfache Parkettierungen*, 2007, www.willimann.org/A07020-Parkettierungen-Theorie.pdf, zuletzt aufgerufen am 18. April 2016

[Wittmann02]
Wittmann, E. C., *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg, Braunschweig 2002

7.8 Stichwortverzeichnis